Metodologías de la CEPAL

Los números índices y su relación con la economía

Federico Dorin
Daniel Perrotti
Patricia Goldszier

Naciones Unidas
CEPAL
POR UN DESARROLLO SOSTENIBLE CON IGUALDAD

La coordinación sustantiva de la colección *Metodologías de la CEPAL* está a cargo de Pascual Gerstenfeld, Director de la División de Estadísticas de la CEPAL.

Esta publicación fue preparada por Federico Dorin, Daniel Perrotti y Patricia Goldszier bajo el auspicio de la División de Estadísticas de la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) y de la oficina de la CEPAL en Washington, D.C.

Los autores agradecen la lectura detallada del documento y los valiosos comentarios de Salvador Marconi y Mara Riestra y el apoyo prestado por Pascual Gerstenfeld, Inés Bustillo y Giovanni Savio para su elaboración.

Publicación de las Naciones Unidas
ISBN: 978-92-1-121992-0 (versión impresa)
ISBN: 978-92-1-058630-6 (versión pdf)
ISBN: 978-92-1-358086-8 (versión ePub)
Número de venta: S.18.II.G.13
LC/PUB.2018/12-P
Distribución: G

Impreso en Naciones Unidas, Santiago
S.17-00988

Esta publicación debe citarse como: F. Dorin, D. Perrotti y P. Goldszier, *Los números índices y su relación con la economía*, Metodologías de la CEPAL, N° 1 (LC/PUB.2018/12-P), Santiago, Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), 2018.

Índice

Cuadros

Gráficos

Recuadros

Símbolos y abreviaturas

α	Tasa común de inflación
C_0	Gasto mínimo para maximizar la utilidad
σ	Elasticidad de sustitución
ε_i	Variables aleatorias distribuidas independientemente, con media *0* y varianza σ^2
g_t	Media geométrica
h_t	Media armónica
I	Ingreso
ICV_t	Índice del costo de vida
$IE_{t-x,t}$	Índice encadenado de t con período de referencia t-x
IGL_t	Índice geométrico de Laspeyres
IGP_t	Índice geométrico de Paasche
IPD_t	Índice de precios de Drobisch
$IPFl_t$	Índice de precios de Fleetwood
IPF_t	Índice de precios de Fisher
$IPGY_t$	Índice de precios geométrico de Young
$IPLM_t$	Índice de precios de Lloyd Mouton
$IPLo_t$	Índice de precios de Lowe
IPL_t	Índice de precios de Laspeyres
IPP_t	Índice de precios de Paasche
IPR_t	Índice de precios de media cuadrática de orden r
$IPTh_t$	Índice de precios de Theil
IPT_t	Índice de precios de Tornqvist
IPW_t	Índice de precios de Walsh
IPY_t	Índice de precios de Young
IP_t	Índice de precios elemental
$I_{t-1,t}$	Índice de t con período de referencia de precios en t-1
m_t	Media aritmética en el período t
N	Numero de observaciones
P_t	Precio del bien en el período t
p^i	Probabilidad, valor esperado
Q_h	Cantidad demandada hicksiana o compensada
Q_d^i	Cantidad del bien i seleccionada "a dedo"
Q_m	Cantidad demandada marshalliana
Q_t^i	Cantidad del bien i en el período t
Q_t^{i*}	Cantidad de bienes que en t producen una utilidad igual que la de t-1
r^i	$r_i = \ln(p^0_i / w^t_i)$ valores que toma una variable aleatoria discreta, R
V_t	Nivel de utilidad en el período t
w_t^i	Ponderador del bien i en el período t
X_t^i	Variable i en el momento t

Introducción

Los números índices constituyen el instrumento básico para sintetizar las estadísticas económicas de modo que las fórmulas utilizadas permitan expresar y describir, por ejemplo, el crecimiento económico de un país o la tasa de inflación de una economía, y también para realizar comparaciones internacionales. Si se utilizan fórmulas diferentes, los resultados difieren y las comparaciones no son válidas. De ahí la importancia de conocer las fórmulas que se utilizan, y de que los países y los organismos internacionales promuevan prácticas comunes que armonicen y estandaricen las mediciones.

Aunque los números índices se vinculan a la macroeconomía, su fundamento teórico se apoya en la microeconomía. Las prácticas recomendadas y el sustento teórico microeconómico se divulgan en los manuales compilados por diversos organismos internacionales, como la División de Estadística de las Naciones Unidas, el Fondo Monetario Internacional (FMI), el Banco Mundial, la Organización Internacional del Trabajo (OIT), la Oficina Estadística de la Unión Europea (Eurostat) y la Organización de Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE).

En esta publicación se resumen los vínculos entre los números índices de precio y de volumen y la teoría microeconómica, se presentan las fórmulas recomendadas para las mediciones internacionales y se explica cómo utilizarlas en las comparaciones internacionales de precios y de volúmenes.

Capítulo I

Comparación directa[1] y selección de un índice desde el punto de vista del consumidor

Supóngase que una economía solo dispone de dos productos (vino y pan) y obsérvense los precios de ambos productos en dos períodos (2013 y 2014), según la situación que se presenta en el cuadro I.1. De 2013 a 2014, el precio del vino se duplica (pasando de 20 a 40 dólares) y el precio del pan se reduce a la mitad en el mismo período (pasando de 20 a 10 dólares). La pregunta que se desea responder es: ¿cuánto varía el nivel general de precios de 2013 a 2014?

■ Cuadro I.1

Precios del vino y del pan tomados como supuesto para un ejercicio de cálculo del nivel general de precios

Año	Precio del vino *(en dólares/litro)*	Precio del pan *(en dólares/kg)*	Nivel general de precios
2013	20	20	¿?
2014	40	10	

Fuente: Elaboración propia.

El nivel general de precios es un tipo de "número índice", un "índice de precios" (IP)[2] que debería reflejar el movimiento general de los precios en la economía.

[1] Los índices directos, bilaterales o binarios comparan dos períodos de forma directa, sin utilizar períodos intermedios. La comparación puede realizarse entre períodos consecutivos, por ejemplo, un año y el siguiente (o el año anterior), o entre períodos más distantes en el tiempo.

[2] Los otros tipos de número índice son los índices de cantidades o de volumen y los índices de valor (estos últimos incluyen variaciones de precio y de volumen). También se compilan índices espaciales (para comparar precios de un mismo producto en distintas regiones o países; estos permiten calcular las paridades de poder adquisitivo de la moneda y se tratan en el capítulo IV de esta publicación) e índices de precios relativos (para comparar precios de distintos productos).

En este ejemplo habría, en teoría, tres respuestas posibles: i) una variación del nivel general de precios de 2013 a 2014 positiva; ii) una variación negativa, o iii) una variación del nivel general de precios igual a cero. Como una oficina de estadística no puede dar tres respuestas al problema planteado, es necesario recurrir a la teoría y a la práctica, así como a los elementos epistemológicos de la disciplina, para brindar una única solución.

Se puede recurrir al razonamiento lógico: si se dispone de dos precios de dos bienes correspondientes a dos períodos, y el precio de uno de ellos se duplica y el otro precio disminuye a la mitad, el nivel agregado de precios debería ser igual en ambos períodos, de modo que la variación agregada de precios sería del 0%.

Se abordará a continuación si esta primera respuesta se mantiene cuando se utilizan otras perspectivas científicas, como la estadística o la economía. Para ello se buscan respuestas utilizando el enfoque de los promedios y los enfoques que se proponen en OIT y otros (2006), el enfoque de la canasta fija, el axiomático (o de los criterios), el estocástico y el económico. En este primer análisis se toma en cuenta la perspectiva del consumidor y en el capítulo II se analiza el punto de vista del productor.

A. Enfoque de los promedios

El enfoque de los promedios, como expresa su definición, consiste en aplicar un promedio a los precios o IP para obtener una medida general del precio o índice. Antes de avanzar en esta definición, cabría hacer una distinción entre los índices simples o elementales y los índices complejos.

1. Índices simples o elementales

El IP que se define para un producto individual se denomina simple o elemental, pues se refiere a un único producto[3]. Su fórmula[4] es:

$$IP_t^{\text{referencia } 0=100} = \frac{P_t}{P_0}.100$$

[3] El concepto de "producto único" hace referencia a un producto homogéneo. A nivel macroeconómico, se utilizan clasificadores internacionales de productos (como la Clasificación Central de Productos (CCP)), que agrupan diferentes clases de productos bajo una misma categoría. Por ese motivo, a nivel macroeconómico, no es posible estimar (en sentido estricto) un índice elemental de un país, ya que este siempre agrupará distintas clases de productos bajo un mismo nombre. En el ejemplo que se utiliza en este estudio, el pan o el vino agrupan distintas clases de dichos productos, con distintas calidades, características y precios. Sin embargo, en estos casos se mantiene el concepto de "índice elemental".

[4] Esta fórmula de IP elementales también se denomina "relativo de precios".

Donde:

$IP_t^{\text{referencia } 0=100}$: índice de precios en el período t, con referencia de precios[5] en el período *0*

P_t: precio del bien en el período t

P_0: precio del bien en el período *0*

Si se aplica la fórmula de IP elementales al ejemplo propuesto en el cuadro I.1, se obtiene el resultado que se presenta en el cuadro I.2.

■ Cuadro I.2

Aplicación de la fórmula de índices de precios elementales al ejemplo del vino y el pan

Año	Precio del vino *(en dólares/litro)*	Precio del pan *(en dólares/kg)*	IP del vino (referencia 100=2013)	IP del pan (referencia 100=2013)
2013	20	20	100	100
2014	40	10	200	50

Fuente: Elaboración propia.

Así, el IP del vino tiene un valor 100 en 2013 y un valor 200 en 2014. Ello indica que el precio se duplicó entre esos dos períodos (en efecto, el litro pasó de 20 a 40 dólares). Por otra parte, el IP del pan tiene un valor 100 en 2013 y un valor 50 en 2014. Ello significa que el precio disminuyó a la mitad (en efecto, el kilogramo pasó de 20 a 10 dólares).

2. Índices complejos

Si en lugar de calcular índices elementales de precios (o cantidades) se busca compilar un índice agregado, es decir, que tenga en cuenta la evolución del conjunto de los precios o el nivel general de precios (o cantidades), surge el problema de la agregación: ¿cómo se suman productos heterogéneos? ¿cómo sumar vino y pan?

En el ejemplo, de 2013 a 2014, el precio del vino se duplica y el del pan disminuye a la mitad. Es un ejemplo sencillo, ya que la canasta contiene solo dos bienes. No obstante, surge nuevamente la pregunta inicial: ¿qué sucede con el índice general de precios de la canasta?, ¿aumenta, disminuye o se mantiene igual? El IP deja de ser simple y pasa a ser complejo: se compone de dos o más precios.

El problema podría tener una solución, sobre la base de calcular un promedio que: i) se obtenga de forma ponderada; ii) permita resumir varias observaciones en un único valor, y iii) refleje un estándar típico comparable en distintos momentos.

[5] El concepto "referencia de los precios" significa el período con el que se comparan los demás precios; en este caso es el período 0. El período de referencia aparece en el denominador de la fórmula. Véase la distinción entre la "referencia de los precios", la "referencia de las ponderaciones" y la "referencia del índice" en la sección B del capítulo III.

Ahora bien, el cálculo se complica, ya que surgen dos problemas de selección: i) la elección del promedio (se debe seleccionar un tipo de promedio entre aquellos que existen) y ii) la elección del ponderador (se debe seleccionar el período de la ponderación, esto es, el inicial (2013), el final (2014) u otro).

a) Elección del promedio

Los promedios más comunes son: la media, que puede ser aritmética, armónica o geométrica; la mediana[6], esto es, el valor central de un conjunto de números ordenados según su magnitud, y la moda[7], es decir, el valor que aparece el mayor número de veces.

Se descarta el uso de la mediana y la moda, ya que son promedios menos sofisticados que la media y, en general, tienen poco uso. Continuando con el ejemplo propuesto, se procede a calcular el nivel general de precios aplicando los tres tipos de media.

i) *Media aritmética simple*

Se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$m_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_t^i}{N}$$

Donde:

m_t: media aritmética en el período *t*

X_t^i: variable del bien *i* que se va a promediar (precio, cantidad u otra) en el momento *t*

N: número de observaciones

Si se aplica la media aritmética a los precios del vino y el pan, se obtiene el resultado que se presenta en el cuadro I.3.

■ Cuadro I.3
Cálculo del nivel de precios con la aplicación de la media aritmética simple

Año	Precio del vino *(en dólares/litro)*	Precio del pan *(en dólares/kg)*	Media aritmética	IP, media aritmética	Variación porcentual del nivel de precios
2013	20	20	20	100	-
2014	40	10	25	125	25

Fuente: Elaboración propia.

Por lo tanto, según el promedio aritmético, el IP de la canasta de vino y pan aumenta un 25% de 2013 a 2014.

6 Sea el siguiente conjunto de datos: 2, 2, 3, 6, 8, 10, 15. En ese conjunto, la mediana es el 6.
7 Partiendo del mismo conjunto de datos, la moda es el 2.

ii) *Media armónica simple*

Su fórmula es:

$$h_t = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_t^i}}$$

Para calcularla, se puede seguir el siguiente procedimiento. Se calcula el promedio aritmético de las inversas de los valores de *X*:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_t^i},}{N}$$

Luego se obtiene la inversa de la operación anterior y se multiplica el resultado por 100. Si se aplica la fórmula al ejemplo del pan y del vino, se obtiene el resultado que se presenta en el cuadro I.4.

■ Cuadro I.4

Cálculo del nivel de precios con la aplicación de la media armónica simple

Año	1/precio del vino *(en dólares/litro)*	1/precio del pan *(en dólares/kg)*	Promedio aritmético *(en dólares)*	Inversa del promedio	IP, media armónica	Variación porcentual del nivel de precios
2013	0,05	0,05	0,05	20	100	-
2014	0,025	0,1	0,0625	16	80	-20

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en el cuadro I.4, el IP para el nivel general basado en la media armónica presenta una tendencia opuesta al que se obtiene partiendo de la media aritmética. Mientras el IP de la media aritmética registra un alza, el IP de la media armónica registra un descenso. El IP de la media armónica sigue al precio que disminuye. En el ejemplo, el precio del pan disminuye, y el índice general de precios tiende a seguir la evolución del precio que se hace cada vez más bajo. Es lo contrario que sucede con la media aritmética: el nivel general de precios sigue al precio que está cada vez más alto (el vino).

iii) *Media geométrica simple*

La fórmula de la media geométrica consiste en la raíz enésima del producto de los *N* valores:

$$g_t^i = \sqrt[N]{X_t^1 \,.\, X_t^2 \,. \ldots .\, X_t^N}$$

Si se la aplica al ejemplo, se obtienen los resultados que se muestran en el cuadro I.5.

■ Cuadro I.5
Cálculo del nivel de precios con la aplicación de la media geométrica simple

Año	Precio del vino *(en dólares/litro)*	Precio del pan *(en dólares/kg)*	Media geométrica	IP, media geométrica	Variación porcentual del nivel de precios
2013	20	20	20	100	-
2014	40	10	20	100	0

Fuente: Elaboración propia.

En este caso se obtiene una variación del 0% en el nivel de precios. Por lo general, este índice se utiliza para promediar tasas de variaciones.

b) Elección de la media óptima

Al pretender encontrar un índice general del nivel de precios de una canasta compuesta por dos productos, se obtuvieron tres respuestas divergentes: según la media aritmética, el nivel general de precios aumenta; según la media armónica, desciende, y, según la media geométrica, no registra variaciones. ¿Cuál de las tres es la "verdadera" tasa de variación del nivel general de precios? Para verificar si estos resultados tienen sustento, es necesario examinar dos propiedades o pruebas estadísticas: i) el cambio de unidad y ii) la evolución del tiempo.

i) *Cambio de unidad*[8]

El cambio de unidad establece que el aumento o la disminución del nivel general de precios no deben estar influenciados por los valores extremos.

En el ejemplo planteado, si el precio del vino se multiplica cada año por 100, se obtienen los resultados que se muestran en el cuadro I.6.

■ Cuadro I.6
Verificación de la propiedad del cambio de unidad del precio

Año	Precio del vino *(en dólares/ litro)*	Precio del pan *(en dólares/kg)*	Media aritmética	IP, media aritmética	Media armónica	IP, media armónica	Media geométrica	IP, media geométrica
2013	2 000	20	1010	100	39,6039	100	200	100
2014	4 000	10	2005	198,51	19,9501	50,37	200	100

Fuente: Elaboración propia.

Ello evidencia que la única media que cumple la propiedad del cambio de unidad es la media geométrica. La media aritmética sigue al valor extremo alto (el vino), pues el índice registra una tasa de variación mayor que la que se calculó en el cuadro I.3 (98,51% y 25%, respectivamente). La media armónica sigue al valor extremo bajo (el pan), ya que el índice

8 Esta prueba es el denominado "criterio de conmensurabilidad" (es el criterio 10 que se presenta en la sección C sobre el enfoque axiomático).

registra una tasa de variación (en valores absolutos) más alta que la del cuadro I.4 (-49,6% y -20%, respectivamente).

ii) *Evolución del tiempo*

Según esta propiedad, el aumento o disminución del nivel general de precios no debe estar influenciado por el transcurso del tiempo.

En el ejemplo, la tendencia de la variación de los precios se repite cada año: el precio del vino se duplica y el precio del pan se reduce a la mitad. La evolución de los precios a nivel elemental es la misma en cada año (el precio del vino se duplica y el precio del pan disminuye a la mitad). Sin embargo, la variación del nivel general de precios varía año tras año en la media aritmética y en la media armónica. No sucede así en la media geométrica, donde la tasa general de todos los años es igual al 0%. La única media que cumple la propiedad de evolución en el tiempo es la media geométrica.

Se puede incluso extender el análisis a más períodos, repitiendo las variaciones de precios interanuales, es decir, suponiendo que en todos los años el precio del vino se duplica y el precio del pan se reduce a la mitad, como se detalla en el cuadro I.7.

■ Cuadro I.7
Verificación de la propiedad de evolución del tiempo

Año	Precio del vino *(en dólares)*	Precio del pan *(en dólares)*	IP del vino *100=2013*	IP del pan *100=2013*
2013	20	20	100	100,00
2014	40	10	200	50,00
2015	80	5	400	25,00
2016	160	2,5	800	12,50
2017	320	1,25	1 600	6,25
2018	640	0,625	3 200	3,13
2019	1 280	0,313	6 400	1,56
2020	2 560	0,156	12 800	0,78
2021	5 120	0,078	25 600	0,39
2022	10 240	0,039	51 200	0,20
2023	20 480	0,020	102 400	0,10

Fuente: Elaboración propia.

Si se aplican los tres tipos de media, se obtienen los resultados que se presentan en el cuadro I.8.

■ Cuadro I.8

Índices de precios y variaciones porcentuales de las medias simples aritmética, armónica y geométrica

Año	IP, media aritmética 100=2003	Variación porcentual del nivel de precios, media aritmética	IP, media armónica 100=2013	Variación porcentual del nivel de precios, media armónica	IP, media geométrica 100=2013	Variación porcentual del nivel de precios, media geométrica
2013	100,00	-	100,00	-	100,00	-
2014	125,00	25	80,00	-20,00	100,00	0
2015	212,50	70	47,06	-41,18	100,00	0
2016	406,25	91,18	24,62	-47,69	100,00	0
2017	803,13	97,69	12,45	-49,42	100,00	0
2018	1 601,56	99,42	6,24	-49,85	100,00	0
2019	3 200,78	99,85	3,12	-49,96	100,00	0
2010	6 400,39	99,96	1,56	-49,99	100,00	0
2011	12 800,20	99,99	0,78	-50,00	100,00	0
2012	25 600,10	100,00	0,39	-50,00	100,00	0
2013	51 200,05	100,00	0,20	-50,00	100,00	0

Fuente: Elaboración propia.

Las variaciones del nivel general de precios obtenidas con la media aritmética tienen signo positivo todos los años, su tendencia es creciente hasta estabilizarse en un valor del 100%, y están sesgadas por los valores extremos altos, en este caso, el precio del producto cuyo precio sube (el vino).

Las variaciones del nivel general de precios calculadas sobre la base de la media armónica son de signo negativo todos los años, su tendencia es creciente hasta estabilizarse en torno al -50%, y están sesgadas por los valores extremos bajos, en este caso, el precio del producto cuyo precio disminuye (el pan).

La variación del nivel general de precios estimada con la media geométrica es del 0% en todos los períodos, lo que demuestra que no está sesgada por los valores extremos, ni altos ni bajos.

En síntesis, al ser la media geométrica la única que cumple con las dos propiedades mencionadas (cambio de unidad y evolución del tiempo), se la puede considerar como la media que arroja un resultado óptimo, el valor "verdadero". La tasa de variación "correcta" del ejemplo es del 0%, lo que coincide con el razonamiento lógico aplicado al principio.

Sin embargo, queda aún el problema de seleccionar el ponderador, ya que hasta ahora solo se han aplicado medias simples (no ponderadas), cuando, en realidad, el peso que tiene cada producto en la canasta varía período a período.

c) Elección de la ponderación

En el ejemplo de dos períodos hay dos ponderadores posibles, el período inicial o el final, aunque se sigue sin saber el peso del pan y del vino en la canasta.

Generalizando, se debe calcular el ponderador w_t^i para cada uno de los *i* productos que integran la canasta en el período *t*:

$$w_t^i = \frac{P_t^i . Q_t^i}{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_t^i}$$

Donde:

w_t^i: ponderador del bien *i* en el período *t*

P_t^i: precio del bien *i* en el período *t*

Q_t^i: cantidad del bien *i* en el período *t*

Para hallar el ponderador w_t^i, es preciso disponer de información sobre los precios y las cantidades. En el cuadro I.9 se presentan, además de los datos sobre los precios ya conocidos, los datos sobre las cantidades de cada bien.

■ Cuadro I.9

Cálculo del valor de la canasta con un precio del vino que se duplica y un precio del pan que disminuye a la mitad

Año	Vino			Pan			Canasta
	Precio *(en dólares/litro)*	Cantidad *(en litros)*	Total *(en dólares)*	Precio *(en dólares/kg)*	Cantidad *(en kg)*	Total *(en dólares)*	Total *(en dólares)*
2013	20	1	20	20	1	20	40
2014	40	0,5	20	10	2	20	40

Fuente: Elaboración propia.

Las ponderaciones de ambos bienes en 2013 y 2014 son las que se presentan en el cuadro I.10.

■ Cuadro I.10

Ponderadores

Año	Ponderador del vino	Ponderador del pan	Total
2013	0,5	0,5	1,0
2014	0,5	0,5	1,0

Fuente: Elaboración propia.

Los ponderadores del vino y del pan se mantienen constantes e iguales a 0,5 en los dos períodos[9], a fin de simplificar los cálculos, pero este es un ejemplo extremo. Generalmente, los ponderadores se modifican a lo largo del tiempo.

d) Elección de la media y la ponderación de forma conjunta

En el ejercicio propuesto[10], si se combina la elección de la media con la elección de la ponderación, surgen seis posibilidades, como se detalla en el cuadro I.11.

■ Cuadro I.11

Alternativas de combinación de la elección de la media y la elección de la ponderación

	Ponderador inicial	Ponderador final
Media aritmética	1	4
Media geométrica	2	5
Media armónica	3	6

Fuente: H. Maletta, "Sustitución en el consumo, medición del costo de vida y tipo de cambio real en la Argentina, 1960-1995", Buenos Aires, inédito, 1996.

Para cada una de las medias, se puede elegir el ponderador inicial o el ponderador final. A continuación, se vuelven a expresar las fórmulas de las medias simples como fórmulas de medias ponderadas.

i) *Medias ponderadas*

Media aritmética ponderada:

$$m_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_t^i}{N} = \frac{w_t^1 . X_t^1 + w_t^2 . X_t^2 + \dots + w_t^N . X_t^N}{w_t^1 + w_t^2 + \dots + w_t^N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_t^i . X_t^i}{1} = \sum_{i=1}^{N} w_t^i . X_t^i$$

Media armónica ponderada:

$$h_t = \frac{N}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{X_t^i}} = \frac{w_t^1 + w_t^2 + \dots + w_t^N}{w_t^1 . \frac{1}{X_t^1} + w_t^2 . \frac{1}{X_t^2} + \dots + w_t^N . \frac{1}{X_t^N}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_t^i . \frac{1}{X_t^i}}$$

Media geométrica ponderada:

$$g_t^i = \sqrt[N]{X_t^1 . X_t^2 . \dots . X_t^N} = \sqrt[\sum_{i=1}^{N} w_t^i]{{X_t^1}^{w_t^1} . {X_t^2}^{w_t^2} . \dots . {X_t^N}^{w_t^N}} = \prod_{i=1}^{N} {X_t^i}^{w_t^i}$$

[9] En 2013, el ponderador del vino resulta de multiplicar su precio (20 dólares) por su cantidad (1 litro), lo que es igual a un gasto de 20 dólares, que, dividido por el valor total de la canasta (40 dólares), arroja el ponderador 0,5. Para calcular el ponderador del pan en ese año, se realizan las mismas operaciones.

[10] Si se ampliara el análisis a más períodos, también se podrían seleccionar los ponderadores de los períodos intermedios.

En el cuadro I.12 se completan las fórmulas para cada una de las seis alternativas del cuadro I.11. En las opciones 1, 2 y 3, el período utilizado en la ponderación es 2013 (w_{2013}) (y en las opciones 4, 5 y 6, es 2014 (w_{2014}).

■ Cuadro I.12

Fórmulas para las distintas alternativas de combinación de la elección de la media y la elección de la ponderación

	Ponderador inicial (2013)	Ponderador final (2014)
Media aritmética	$\sum_{i=1}^{N} w_{2013}^{i} \cdot \frac{P_t^i}{P_{2013}^i}$	$\sum_{i=1}^{N} w_{2014}^{i} \cdot \frac{P_t^i}{P_{2013}^i}$
Media geométrica	$\prod_{i=1}^{N} \left(\frac{P_t^i}{P_{2013}^i}\right)^{w_{2013}^i}$	$\prod_{i=1}^{N} \left(\frac{P_t^i}{P_{2013}^i}\right)^{w_{2014}^i}$
Media armónica	$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_{2013}^{i} \cdot \frac{P_{2013}^i}{P_t^i}}$	$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_{2014}^{i} \cdot \frac{P_{2013}^i}{P_t^i}}$

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de H. Maletta, "Sustitución en el consumo, medición del costo de vida y tipo de cambio real en la Argentina, 1960-1995", Buenos Aires, inédito, 1996.

Si se reemplazan los precios P_t^i por los IP elementales $IP_t^i = \frac{P_t^i}{P_0^i}$, se obtiene el resultado que se presenta en el cuadro I.13.

■ Cuadro I.13

Fórmulas para las distintas alternativas de combinación de la elección de la media y la elección de la ponderación, expresadas en índices de precios elementales

	Ponderador inicial (2013)	Ponderador final (2014)
Media aritmética	$\sum_{i=1}^{N} w_{2013}^{i} \cdot IP_t^i$	$\sum_{i=1}^{N} w_{2014}^{i} \cdot IP_t^i$
Media geométrica	$\prod_{i=1}^{N} (IP_t^i)^{w_{2013}^i}$	$\prod_{i=1}^{N} (IP_t^i)^{w_{2014}^i}$
Media armónica	$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_{2013}^{i} \cdot (IP_t^i)^{-1}}$	$\frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_{2014}^{i} \cdot (IP_t^i)^{-1}}$

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de H. Maletta, "Sustitución en el consumo, medición del costo de vida y tipo de cambio real en la Argentina, 1960-1995", Buenos Aires, inédito, 1996.

Si se calculan los resultados para cada una de las seis opciones con los datos del ejercicio (véase el anexo A1), se puede comprobar que no hay seis resultados distintos, sino tres, como se detalla en el cuadro I.14.

■ Cuadro I.14

Tasas de variación del nivel general de precios de 2013 a 2014 (ponderadores iguales)

(En porcentajes)

	Ponderador inicial (2013)	Ponderador final (2014)
Media aritmética	25	25
Media armónica	-20	-20
Media geométrica	0	0

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de H. Maletta, "Sustitución en el consumo, medición del costo de vida y tipo de cambio real en la Argentina, 1960-1995", Buenos Aires, inédito, 1996.

Se obtiene un resultado para cada media. Como los ponderadores 2013 de los productos son iguales a los ponderadores 2014 (0,5 tanto para el vino como para el pan), los resultados para cada una de las medias coinciden, independientemente de que se pondere en 2013 o en 2014. Además, el resultado para cada media es el mismo que se calculó antes, porque el ponderador de cada bien es igual a 0,5.

En el ejercicio, el promedio simple coincide con el promedio ponderado. Sin embargo, generalmente no es así (ya que los ponderadores se modifican período a período y no tienen por qué coincidir con el valor 0,5) y existen, por lo tanto, seis resultados diferentes. En el anexo A2 se modifica la cantidad del producto vino de 2014 y se recalculan los resultados para las seis medias, que se presentan en el cuadro I.15.

■ Cuadro I.15

Tasas de variación del nivel general de precios de 2013 a 2014 (ponderadores variables)

(En porcentajes)

	Ponderador inicial (2013)	Ponderador final (2014)
Media aritmética	25,0	37,5
Media armónica	-20,0	-11,1
Media geométrica	0,0	12,2

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de H. Maletta, "Sustitución en el consumo, medición del costo de vida y tipo de cambio real en la Argentina, 1960-1995", Buenos Aires, inédito, 1996.

Cabe resaltar que, para determinar un número índice, es necesario definir tres elementos: los índices elementales, las ponderaciones y la fórmula para agregar los índices elementales.

Desde el enfoque de los promedios ponderados, para verificar si la fórmula de la media geométrica ponderada sigue siendo "óptima", como sucedía con la media geométrica simple, se debe realizar la prueba correspondiente y comparar sus resultados con los que se obtienen a partir de las medias ponderadas aritmética y armónica. Esta cuestión se analizará más adelante, en la sección C, sobre el enfoque axiomático. A continuación, se presenta el enfoque de la canasta fija.

B. Enfoque de la canasta fija

Este enfoque surge de la idea "intuitiva" de fijar una canasta de productos en un período determinado y observar cómo varían los precios en comparación con otro momento, sobre la base de mantener las mismas cantidades establecidas para el período en el que se fijó la canasta.

El primer antecedente histórico de este enfoque, según los registros conocidos hasta la fecha, se encuentra en la obra del obispo de Ely (Reino Unido), William Fleetwood (1656-1723), que en 1707 escribió *Chronicum Preciosum*. En esa obra, el autor se preguntaba: ¿qué poder de compra tendrían hoy 5 libras de 1440? La cantidad de 5 libras hacía referencia a una beca que recibían los estudiantes de la Universidad de Oxford.

Para responder a esa pregunta, el obispo Fleetwood tuvo que componer una canasta del "consumo típico" de un estudiante. Como no había encuestas en las que basarse, construyó esa canasta "a dedo", incluyendo pan, bebida, carne, ropa y, obviamente, libros. Con "el dedo" del obispo, se seleccionó la canasta con la que se debían medir los precios.

Una vez realizada la medición, se llegó a la conclusión de que las 5 libras de 1440 equivalían a 28 o 30 libras de 1707 (Fleetwood, 1707), es decir, que para mantener el poder de compra de 5 libras de 1440, se debían abonar en concepto de beca de 28 a 30 libras en 1707, de acuerdo con el valor calculado partiendo de la canasta de Fleetwood:

$$IPFl_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_d^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_d^i}$$

Donde:

$IPFl_t$: índice de precios de Fleetwood en el período *t*

P_t^i: precio del bien *i* en el período *t*

Q_d^i: cantidad del bien *i* seleccionada a dedo

P_0^i: precio del bien *i* en el período *0*

Si en la comparación se consideran solo dos períodos (en el ejemplo de Fleetwood, 1440 y 1707), se presentan, en principio, dos alternativas: i) considerar como fija la canasta de consumo de la situación inicial (1440), o ii) considerar como fija la canasta de consumo en el momento final (1707).

El obispo Fleetwood, desconociendo los datos de las cantidades de las canastas de 1440 y de 1707, optó por una tercera alternativa, que consistió en fijar una canasta distinta de la inicial y de la final, esto es, una canasta elegida a dedo.

En 1823, Joseph Lowe desarrolló la fórmula empleada por Fleetwood[11], estableciendo lo que se conoce como índice de precios de Lowe. Si se compara la fórmula Fleetwood-Lowe con las desarrolladas en el cuadro I.10, se puede observar que se trata de un promedio aritmético ponderado:

$$IPFl_t \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i \cdot Q_d^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i \cdot Q_d^i} \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right) w_{0d}^i \text{ con } w_{0d}^i = \frac{P_0^i Q_d^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i Q_d^i}$$

Pero la ponderación *w* no está referida a un período determinado (inicial o final), sino que corresponde a una canasta seleccionada a dedo. Es un ponderador "híbrido" con precios en el período *0* y cantidades de un "período" diferente de *0* (*d*), que, como se señaló en el caso de Fleetwood, no corresponde a ningún período observado, sino a una estimación subjetiva.

El ejemplo de los precios del vino y el pan en 2013 y 2014 también se puede plantear con cantidades asignadas a dedo, esto es, que no se basen en observaciones realizadas en alguno de los períodos, según se presenta en el cuadro I.16.

Cuadro I.16
Datos del ejemplo de precios del vino y el pan con cantidades asignadas a dedo

Año	Vino	Vino	Vino	Pan	Pan	Pan	Gasto total
	Precio (P) *(en dólares)*	Cantidad (Q) *(en litros)*	Valor (V) = P.Q *(en dólares)*	Precio (P) *(en dólares)*	Cantidad (Q) *(en kg)*	Valor (V) = P.Q *(en dólares)*	*(en dólares)*
2013	20	2	40	20	3	60	100
2014	40	2	80	10	3	30	110

Fuente: Elaboración propia.

De ese modo se puede calcular el índice de precios de Fleetwood-Lowe, lo que permite obtener los resultados que se presentan en el cuadro I.17.

Cuadro I.17
Índice de precios de Fleetwood (media aritmética con precios de 2013 y cantidades a dedo)

Año	Ponderador del vino: 2013	Ponderador del pan: 2013	IP del vino 100=2013	IP del pan 100=2013	IP de Fleetwood 100=2013	Variación porcentual, IP de Fleetwood
2013	0,40	0,60	100,0	100,0	100,0	-
2014	0,40	0,60	200,0	50,0	110,0	10,0

Fuente: Elaboración propia.

Carli (1764) y Jevons (1865) presentaron los que ahora se conocen como índices de precios de Carli y de Jevons. Lo que hicieron fue estimar los promedios simples (no ponderados) aritmético (Carli) y geométrico (Jevons) de los índices de precios elementales. Los índices más comunes e importantes en cuanto a la selección de las canastas son los índices de Laspeyres (1871) y de Paasche (1874).

11 Por ese motivo, Diewert (1988) denominó a Lowe el "padre de los índices de precio".

1. Índice de precios de Laspeyres[12]

Este índice parte de una canasta fija de productos (la del período inicial), en la que se sustituyen los precios período a período. Su fórmula es la siguiente:

$$IPL_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i Q_0^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i Q_0^i} . 100$$

Donde:

IPL_t: índice de precios de Laspeyres en el período *t*

P_t^i: precio del bien *i* en el período *t*

Q_0^i: cantidad del bien *i* en el período *0*

P_0^i: precio del bien *i* en el período *0*

Siguiendo el ejemplo de la canasta compuesta por los productos vino y pan, se obtiene el resultado que se muestra en el cuadro I.18.

■ Cuadro I.18

Índice de precios de Laspeyres y su variación porcentual

Año	Índice de precios de Laspeyres	Variación porcentual
2013	100	-
2014	125	25

Fuente: Elaboración propia.

Una de las críticas que se realizan a este índice es que, como la canasta de productos es fija (la del año 0), no refleja la reacción de la conducta del consumidor (o del productor), como supone la teoría microeconómica, modificando las cantidades consumidas (o producidas) como una consecuencia de las variaciones de los precios. En este índice se supone que el consumidor (o el productor) consume (o produce) la misma cantidad que en el período 0, independientemente de las variaciones de los precios. En 2013, el consumidor hipotético del ejemplo consumía un litro de vino y un kilogramo de pan. En el índice de precios de Laspeyres se supone que el consumidor mantuvo esta canasta en 2013 y en el resto de los períodos, sin reaccionar ante los cambios de los precios de ambos bienes, cuestión que no se ha verificado mediante la serie de cantidades consumidas. Como posible solución a esta crítica al índice de precios de Laspeyres, se presenta el índice de precios de Paasche.

12 Laspeyres construyó el índice para la ciudad de Hamburgo (Alemania).

2. Índice de precios de Paasche[13]

En este caso se utiliza una canasta con ponderaciones fijas en las cantidades finales. Su fórmula es:

$$IPP_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_t^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_t^i} . 100$$

Donde:

IPP_t: índice de precios de Paasche en el período *t*

P_t^i: precio del bien *i* en el período *t*

Q_t^i: cantidad del bien *i* en el período *t*

P_0^i: precio del bien *i* en el período *0*

Aplicándola al ejemplo, se obtiene el resultado que se presenta en el cuadro I.19.

■ Cuadro I.19

Índice de precios de Paasche y su variación porcentual

Año	Índice de precios de Paasche	Variación porcentual
2013	100	-
2014	80	-20

Fuente: Elaboración propia.

Se vuelve a plantear entonces si el índice de Paasche soluciona el problema del índice de Laspeyres. Se señaló que, en el índice de Laspeyres, la conducta implícita del consumidor es invariante ante las modificaciones de los precios. ¿Qué sucede con la conducta del consumidor en el índice de Paasche? Este mide la variación de los precios de la canasta consumida en el presente llevándola al pasado. Supone que el consumidor consume la canasta más reciente (la actual), independientemente de los precios verificados en el pasado. Lo que hace el índice de Paasche es medir el pasado con los patrones actuales. El consumidor mantiene la canasta de 2014, también para 2013, independientemente de las modificaciones de los precios. Los datos sustituidos tampoco verifican este supuesto. El mismo problema que tiene el índice de Laspeyres aparece en el índice de Paasche: el patrón de conducta del consumidor (productor) es invariante ante las modificaciones de los precios. Consume lo mismo con independencia de que los precios relativos se modifiquen. No capta el sesgo de sustitución (*substitution bias*), como se señala en el Sistema de Cuentas Nacionales:

"Desde el punto de vista de la teoría económica, las cantidades observadas pueden suponerse que son función de los precios, tal como se especifica en alguna función de utilidad o de producción" (Comisión de las Comunidades Europeas y otros, 1993).

A continuación se analiza qué tipo de promedio son los índices de Laspeyres y de Paasche.

[13] Elaborado por Paasche como alternativa al índice de precios de Laspeyres.

3. Índice de precios de Laspeyres y tipo de media

La fórmula es:

$$IPL_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_0^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{P_0^i . Q_0^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i} . \frac{P_t^i}{P_0^i} = \sum_{i=1}^{N} w_0 . \frac{P_t^i}{P_0^i} = \sum_{i=1}^{N} w_0 . IPel_t^i$$

Donde $w_0 = \frac{P_0^i . Q_0^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i}.$

Es un promedio aritmético con ponderadores iniciales. Corresponde a la casilla 1 de los cuadros I.11, I.12 y I.13.

4. Índice de precios de Paasche y tipo de media

La fórmula es:

$$IPP_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_t^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_t^i} = \frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_t^i}{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_t^i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{P_t^i . Q_t^i}{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_t^i} . \frac{P_0^i}{P_t^i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_t . \frac{P_0^i}{P_t^i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} w_t . \left(IPel_t^i\right)^{-1}}$$

Donde $w_t = \frac{P_t^i . Q_t^i}{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_t^i}.$

Es un promedio armónico con ponderadores finales. Corresponde a la casilla 6 de los cuadros I.11, I.12 y I.13.

Así pues, la diferencia entre el índice de precios de Laspeyres y el de Paasche radica en dos elementos: i) el ponderador (inicial en el de Laspeyres y final en el de Paasche) y ii) la media (aritmética en el de Laspeyres y armónica en el de Paasche). En virtud de la diferencia en los ponderadores, el índice de Laspeyres es sinónimo de índice con ponderador inicial, y el de Paasche, de índice con ponderador final.

Por lo tanto, se pueden volver a denominar las fórmulas del cuadro I.13, como se indica en el cuadro I.20.

■ Cuadro I.20

Índices para las distintas alternativas de combinación de la elección de la media y la elección de la ponderación

	Ponderador inicial o de Laspeyres	Ponderador final o de Paasche
Media aritmética (m)	Índice de Laspeyres	Índice aritmético de Paasche o índice de Palgrave
Media geométrica (g)	Índice geométrico de Laspeyres	Índice geométrico de Paasche
Media armónica (h)	Índice armónico de Laspeyres	Índice de Paasche

Fuente: H. Maletta, "Sustitución en el consumo, medición del costo de vida y tipo de cambio real en la Argentina, 1960-1995", Buenos Aires, inédito, 1996.

Los índices definidos en el cuadro I.20 son índices estadísticos, ya que no establecen vínculos con las categorías analíticas de la teoría económica[14]. Desde el punto de vista estadístico, y aplicando promedios simples, se ha demostrado que el mejor índice es el geométrico. Ello conduciría a seleccionar el índice geométrico de Laspeyres o el índice geométrico de Paasche como los "mejores".

No obstante, sobre la base de las casillas definidas en el cuadro I.20, se pueden plantear las siguientes alternativas: i) un promedio entre pares de índices o ii) índices con canastas distintas de *0* y de *t*, por ejemplo, en períodos intermedios.

Si se considera el promedio entre índices, se puede calcular:

i) la media aritmética entre el índice de precios de Laspeyres y el de Paasche:

$$IP_t = \frac{1}{2}.IPL_t + \frac{1}{2}.IPP_t$$

ii) la media armónica de los índices de precios de Laspeyres y de Paasche:

$$IP_t = \frac{2}{\frac{1}{IPL_t}+\frac{1}{IPP_t}}$$

iii) o la media geométrica de ambos índices:

$$IP_t = (IPL_t.IPP_t)^{\frac{1}{2}}$$

La propuesta de la media aritmética fue desarrollada por Drobisch, quien planteó precisamente la pertinencia de utilizar esa fórmula, dando origen al índice de precios de Drobisch.

Por otra parte, Fisher propuso la utilización de la media geométrica, dando origen al índice de precios de Fisher, que, como se analizará posteriormente, es considerado como uno de los índices superlativos:

$$IPF_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i \cdot Q_0^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i \cdot Q_0^i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i \cdot Q_t^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i \cdot Q_t^i}}$$

El resultado de aplicar el índice de precios de Fisher en el ejercicio del cuadro I.9 se presenta en el cuadro I.21.

14 Por ejemplo, no establecen vínculos del tipo: "si el precio del producto aumenta, las cantidades demandadas disminuyen".

■ Cuadro I.21

Índice de precios de Fisher (media geométrica de los índices de Laspeyres y de Paasche)

Año	Índice de precios de Laspeyres 100=2013	Índice de precios de Paasche 100=2013	Índice de precios de Fisher 100=2013	Variación porcentual
2013	100	100	100	-
2014	125	80	100	0

Fuente: Elaboración propia.

También se pueden seleccionar las casillas 2 y 5 del cuadro I.11, o los índices geométricos de Laspeyres y de Paasche del cuadro I.20, y obtener un promedio geométrico de ambos, denominado índice de precios de Törnqvist:

$$IPT_t = \sqrt{IGL_t . IGP_t}$$

Si se aplica la fórmula de Törnqvist al ejercicio del cuadro I.9, se obtiene el resultado que se presenta en el cuadro I.22.

■ Cuadro I.22

Índice de precios de Törnqvist (media geométrica de los índices geométricos de Laspeyres y de Paasche)

Año	Índice de precios geométrico de Laspeyres 100=2013	Índice de precios geométrico de Paasche 100=2013	Índice de precios de Törnqvist 100=2013	Variación porcentual
2013	100	100	100	-
2014	100	100	100	0

Fuente: Elaboración propia.

El índice de precios de Törnqvist se puede expresar también como:

$$IPT_t \equiv \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right)^{\frac{(s_0^i + s_t^i)}{2}} = \exp\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}(s_0^i + s_t^i) . \ln\left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right)\right]$$

Si se considera la opción de las canastas distintas de los períodos *0* y *t*, se puede definir un índice de precios de Lowe (según la fórmula de 1823):

$$IPLo_t \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_b^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_b^i} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right) . w_{0b}^i$$

Donde: $w_{ob}^i = \dfrac{P_0^i . Q_b^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_b^i}$

Como se señaló más arriba, la fórmula de Lowe es la misma que la utilizada para calcular el índice de precios de Fleetwood, que es un promedio aritmético de los relativos de precios con ponderaciones *w* híbridas, pues los precios corresponden al período *0* (p^i_0) y las cantidades al período *b* (q^i_b)[15].

También se puede calcular el índice de precios de Young (según la fórmula que dio a conocer en 1812):

$$IPY_t = \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right) . w_b^i$$

Donde: $w_b^i = \dfrac{P_b^i . Q_b^i}{\sum_{i=1}^{N} P_b^i . Q_b^i}$

La fórmula de Young también es un promedio aritmético de los relativos de precios, utilizando un ponderador que corresponde a un período "*b*", distinto de los períodos *0* y *t*. Se diferencia del índice de precios de Fleetwood-Lowe en que el ponderador no es híbrido, ya que los precios y las cantidades se refieren al período *b*.

La fórmula de Young también puede expresarse utilizando un promedio geométrico de los cocientes relativos de precios, obteniéndose el índice de precios geométrico de Young:

$$IPGY_t = \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right)^{w_b^i} = \left(\frac{P_t^1}{P_0^1}\right)^{w_b^1} . \left(\frac{P_t^2}{P_0^2}\right)^{w_b^2} . \dots . \left(\frac{P_t^N}{P_0^N}\right)^{w_b^N}$$

Donde: $w_b^i = \dfrac{P_b^i . Q_b^i}{\sum_{i=1}^{N} P_b^i . Q_b^i}$

Asimismo, se puede plantear un promedio geométrico de las cantidades o los ponderadores y de los precios, obteniéndose el índice de Walsh[16]: $IPW_t = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_t^i (q_0^i . q_t^i)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^{N} p_0^i (q_0^i . q_t^i)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (w_0^i . w_t^i)^{\frac{1}{2}} (p_t^i / p_0^i)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^{N} (w_0^i . w_t^i)^{\frac{1}{2}} (p_0^i / p_t^i)^{\frac{1}{2}}}$

Si se aplica dicho índice al ejemplo del cuadro I.9, se obtiene el resultado que se muestra en el cuadro I.23.

■ Cuadro I.23
Índice de precios de Walsh

Año	Ponderadores del vino	Ponderadores del pan	Índice de precios del vino 100=2013	Índice de precios del pan 100=2013	Índice de precios de Walsh 100=2013	Variación porcentual
2013	0,50	0,50	100,0	100,0	100,0	-
2014	0,50	0,50	200,0	50,0	100,0	0,0

Fuente: Elaboración propia.

15 La diferencia es que el índice de Lowe utiliza cantidades observadas y el índice de Fleetwood utiliza cantidades estimadas de forma subjetiva.

16 Como se puede observar, la primera expresión del índice de precios de Walsh es parecida al índice de precios de Lowe (IPLo), ya que multiplica los relativos de precios por una canasta, que resulta ser el promedio geométrico de la canasta inicial y la final.

Se propone también el índice de precios de media cuadrática de orden r:

$$IPR_t = \frac{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{N} w_0^i . \left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right)^{\frac{r}{2}}}}{\sqrt[r]{\sum_{i=1}^{N} w_t^i . \left(\frac{P_0^i}{P_t^i}\right)^{\frac{r}{2}}}}$$

Los índices de precios de Fisher, de Törnqvist y de Walsh y el índice de precios de media cuadrática de orden r son índices simétricos, pues tratan de forma simétrica la información disponible: el índice de precios de Fisher con respecto a los índices de Laspeyres y de Paasche; el de Törnqvist con respecto a los índices geométricos de Laspeyres y de Paasche; el de Walsh con respecto a los precios y las cantidades o los ponderadores; y el de media cuadrática de orden r guarda simetría entre los ponderadores y los precios del numerador y del denominador.

Asimismo, el índice de precios de media cuadrática de orden r es una generalización de los índices de Fisher, de Törnqvist y de Walsh, ya que se iguala al índice de precios de Fisher si *r* tiende a *2*, al de Walsh si *r* tiende a *1*, y se acerca al de Törnqvist si *r* tiende a *0*.

Por último, otra fórmula del índice de precios es el índice de Lloyd Mouton, que introduce en su definición un concepto económico, la elasticidad de sustitución:

$$IPLM_t = \left[\sum_{i=1}^{N} w_0^i . \left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Donde σ es el valor de la elasticidad de sustitución[17]. Nótese que el índice de Lloyd Mouton utiliza la misma información que el índice de Laspeyres, incorporando además una estimación de la elasticidad de sustitución. En la sección E sobre el enfoque económico, se analiza con más detalle el concepto de elasticidad de sustitución.

Se dispone de distintas alternativas (y resultados) de canastas de precios o promedios de canastas, y se deben seleccionar las que reflejen mejor la evolución del nivel general de precios. Del análisis puro de las canastas no se desprende ninguna conclusión, salvo que sería mejor (utilizando, una vez más, consideraciones lógicas) incluir más de una canasta en las ponderaciones, para captar de alguna manera el sesgo de sustitución. Con este criterio, los índices seleccionados serían el índice de precios de media cuadrática de orden r, el de Fisher, el de Törnqvist y el de Walsh, y no el de Laspeyres ni el de Paasche[18].

Nuevamente se debe recurrir a pruebas, criterios o axiomas, y ese análisis implica recurrir a un enfoque axiomático.

17 Este concepto se define en el apartado 2 de la sección E de este capítulo.

18 Obsérvese también que, si se aplican las fórmulas al ejemplo que se propone en el cuadro I.7, los resultados de los índices de Fisher, de Törnqvist y de Walsh son idénticos.

C. Enfoque axiomático

El enfoque axiomático indaga sobre la capacidad de cada tipo de índice para satisfacer ciertas pruebas o propiedades, que permitan considerarlo apropiado para medir la evolución de una variable, de acuerdo con el precepto de que "si una fórmula resulta tener propiedades indeseables, debe ponerse en duda su conveniencia como índice objetivo para una oficina de estadística" (OIT y otros, 2006).

En este enfoque se proponen ciertas propiedades deseadas de los índices y después se intenta determinar si las respectivas fórmulas cumplen esas propiedades. El índice que cumpla las propiedades podría ser considerado como "el mejor".

En el *Manual del índice de precios al consumidor: teoría y práctica* (OIT y otros, 2006), se detallan 20 criterios (o axiomas) básicos y 2 adicionales, que se presentan en el cuadro I.24.

■ Cuadro I.24

Criterios básicos y adicionales aplicables a los índices, según el primer enfoque axiomático

Denominación	Criterio
Criterios básicos (20)	
C1	Positividad
C2	Continuidad
C3	Identidad o precios constantes
C4	Canasta fija o cantidades constantes
C5	Proporcionalidad respecto de los precios del período corriente
C6	Proporcionalidad inversa respecto de los precios del período base
C7	Invariancia ante variaciones proporcionales de las cantidades corrientes
C8	Invariancia ante variaciones proporcionales de las cantidades del período base
C9	Reversión de productos
C10	Conmensurabilidad
C11	Reversión temporal
C12	Reversión de cantidades
C13	Reversión de precios
C14	Valor medio de los precios
C15	Valor medio de las cantidades
C16	Cotas de Paasche y de Laspeyres
C17	Monoticidad respecto de los precios del período corriente
C18	Monoticidad respecto de los precios del período base
C19	Monoticidad respecto de las cantidades del período corriente
C20	Monoticidad respecto de las cantidades del período base
Criterios adicionales (2)	
C21	Reversión de los factores
C22	Aditividad

Fuente: Organización Internacional del Trabajo (OIT) y otros (2006), *Manual del índice de precios al consumidor: teoría y práctica*, Washington, D.C. [en línea] http://www.imf.org/external/ pubs/ft/cpi/manual/2014/esl/cpi_sp.pdf.

De los 20 criterios básicos, 3 se consideran importantes en el análisis de los resultados de los números índices: el C1 (positividad), el C10 (conmensurabilidad) y el C11 (reversión temporal). De los dos criterios adicionales, el C21 (reversión de los factores) también puede considerarse crucial.

El C1 (positividad) postula que el índice de precios y los vectores de precios y de cantidades que lo constituyen deben ser positivos:

$$P(P^0, P^1, Q^0, Q^1) > 0$$

El C10 (conmensurabilidad) ya se analizó en la parte relativa a las pruebas que se aplican a las medias aritmética, armónica y geométrica (prueba de cambio de unidad). Postula que el índice de precios no debe cambiar si se modifican las unidades de medida de los productos.

El C11 (reversión temporal) establece que debe obtenerse el mismo resultado tanto si la variación del índice se mide hacia adelante en el tiempo (de *0* a *1*), como si se mide hacia atrás (de *1* a *0*):

$$P(P^0, P^1, Q^0, Q^1) = \frac{1}{P(P^0, P^1, Q^0, Q^1)}$$

El C21 (reversión de los factores) postula que, si se multiplica el índice de precios por el índice de volumen, se debe obtener un resultado idéntico al índice de valor:

$$P(P^0, P^1, Q^0, Q^1). P(Q^0, Q^1, P^0, P^1) = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_t^i . Q_t^i}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i}$$

El único índice que cumple los 20 criterios y también el criterio de reversión de los factores (C21) es el índice de precios de Fisher. El único criterio que el índice de Fisher no cumpliría es el de aditividad (C22), que postula que “la suma de las variaciones de los subagregados de un índice de cantidades iguale a la variación del total” (OIT y otros, 2006, pág. 10), aunque se puede descomponer la variación porcentual del total en componentes aditivos que reflejen la variación de los precios o de las cantidades.

El índice de Laspeyres y el de Paasche fallan en 3 y cumplen 17 de los 20 criterios básicos. Los criterios en los que fallan son el C11 (reversión temporal), el C12 (reversión de las cantidades) y el C13 (reversión de los precios). Se considera un defecto importante no cumplir el C11. También fallan en el C21 (reversión de los factores), aunque lo cumplen de forma débil, es decir, si se multiplica un índice de precios de Laspeyres por un índice de volumen de Paasche se obtiene el índice de valor, y si se multiplica un índice de precios de Paasche por un índice de volumen de Laspeyres se obtiene también el índice de valor. Ambos índices cumplen el C22 (aditividad).

El índice de Walsh falla en 4[19] y cumple 16 de los 20 criterios básicos. Falla también en el criterio C21 (reversión de los factores), pero cumple los criterios C11 (reversión temporal) y C22 (aditividad).

El índice de Törnqvist falla en 9[20] y cumple 11 de los 20 criterios básicos. Falla en los criterios C21 (reversión de los factores) y C22 (aditividad) y cumple el C11 (reversión temporal). Sin embargo, como cumple tres de los cuatro criterios definidos como importantes —C1 (positividad), C10 (conmensurabilidad) y C11 (reversión temporal)— y "se aproxima bastante al índice de Fisher si se utilizan datos de series temporales 'normales' que presentan tendencias relativamente graduales [...], en estas circunstancias puede decirse que el índice de Törnqvist satisface los 20 criterios de manera razonablemente aproximada" (OIT y otros, 2016, pág. 347).

Del enfoque axiomático se desprende entonces que el "mejor" índice es el índice de precios de Fisher, al que le siguen el índice de Walsh y el de Törnqvist. En el ejercicio planteado, estos tres índices arrojan tasas de variación del nivel general de precios iguales al 0%. Coinciden en sus resultados con el razonamiento lógico aplicado al principio y también con las primeras evaluaciones realizadas con la media geométrica simple. El índice de precios de Fisher es un promedio geométrico de índices (el índice de Laspeyres y el de Paasche). El índice de precios de Törnqvist también es un promedio geométrico, pero de los índices geométricos de Laspeyres y de Paasche. El índice de precios de Walsh utiliza medias geométricas para promediar las ponderaciones y los precios.

D. Enfoque estocástico

Desde el enfoque estocástico, que también se denomina "segundo enfoque axiomático", se considera que los índices de precios son estimadores muestrales: cada cociente de precios está considerado como una variable aleatoria, con una media igual al índice de precios subyacente (inflación más componente de error aleatorio con media igual a cero).

La idea básica es que cada relativo de precios puede considerarse como una estimación de la tasa de inflación α entre los períodos *0* y *1*:

$$\frac{P_1^i}{P_0^i} = \alpha + \varepsilon_i$$

Donde:

α: tasa común de inflación

ε_i: variables aleatorias distribuidas independientemente, con media *0* y varianza σ^2

---

19 C13 (reversión de precios), C16 (cotas de Paasche y de Laspeyres), C19 (monoticidad respecto de las cantidades del período corriente) y C20 (monoticidad respecto de las cantidades del período base).

20 C4 (canasta fija), C12 (reversión de cantidades), C13 (reversión de precios), C15 (valor medio de las cantidades), C16 (cotas de Paasche y de Laspeyres) y los criterios C17, C18, C19 y C20 (todos referentes a monoticidad).

El índice de precios de Carli es un estimador (de mínimos cuadrados o de máxima verosimilitud) de α, pero no ponderado, y sesgado de acuerdo a los enfoques de los promedios y axiomático (OIT y otros, 2006, pág. 349).

Si se cambia la especificación estocástica (mediante la aplicación del logaritmo natural), suponiendo que el cociente (logarítmico) de precios es un estimador no sesgado del logaritmo de la tasa de inflación, la media geométrica es el estimador muestral adecuado:

$$ln\frac{P_1^i}{P_0^i} = \beta + \varepsilon_i$$

Donde:

$\beta = ln\,\alpha$

ε_i: variables aleatorias distribuidas independientemente, con media *0* y varianza σ^2

El estimador (de mínimos cuadrados o de máxima verosimilitud) de β es el logaritmo de la media geométrica de los relativos de precios. De ahí que la estimación de la tasa de inflación común α sea el índice de precios de Jevons.

Una crítica que se realiza a los índices de precios de Carli, y también al de Jevons, es que asigna a todos los relativos de precios la misma ponderación. También Keynes (OIT y otros, pág. 350) realizó una crítica (económica), en el sentido de que no existe "independencia" entre los errores ε de las observaciones, sino que existe conexidad: i) la variación del precio de un producto necesariamente incide en la variación de los precios de los demás; ii) los precios no se distribuyen de manera independiente entre sí ni con respecto a las cantidades, sino que las cantidades se relacionan funcionalmente con los precios, y iii) deben ponderarse las variaciones de precios por su importancia económica, es decir, por las cantidades o los gastos (aparece nuevamente la cuestión de la ponderación).

Theil (1967) propuso una solución ante la falta de ponderación del índice de Jevons, dando lugar al enfoque estocástico ponderado:

$$IPTh_t = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\,(w_0^i + w_t^i).\,ln\left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right)$$

Como se puede observar, la fórmula de este índice es igual a la del índice de Törnqvist.

De Theil se deriva el enfoque de muestreo: la primera parte del miembro izquierdo de la fórmula de Theil ($\frac{1}{2}\,(w_0^i + w_t^i)$) se puede interpretar como una probabilidad p^i (el valor esperado[21]), y la última (ln $\left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right)$), como los valores r^i [22] que toma una variable aleatoria discreta, R. En otras palabras, el índice de precios de Theil se puede definir en términos de probabilidades, de modo que el valor esperado de la variable aleatoria discreta R es:

$$E[R] = \sum_{i=1}^{N} p_i.r_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\,(w_0^i + w_t^i).\,ln\left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right) = IPTh_t$$

21 Donde $p_i = ½\,(w^0_i + w^t_i)$. Como los ponderadores $(w^0_i + w^1_i)$ suman 1 en cada producto i, las probabilidades p_i también sumarán 1.

22 Donde $r_i = \ln(p^0_i / w^t_i)$.

Generalizando, los *n* cocientes de relativos de precios discretos $\frac{p_t^i}{p_0^i}$ tienen una probabilidad estadística discreta, donde la i-ésima probabilidad p_i es una función de las participaciones del producto *i* en el gasto, en las dos situaciones que se consideran, w_0^i y w_t^i. Ello da lugar a diferentes índices de precios, según cómo se elijan las funciones de los precios discretos y de las probabilidades (ponderaciones) (OIT y otros, 2006, pág. 352). Así, cada fórmula de los índices de precios que ya se ha analizado se puede expresar en términos de funciones de precios y de probabilidades. En el caso del índice de precios de Theil, la función de precios discretos es el logaritmo natural, y la función de probabilidad es la media aritmética sin ponderar.

Para determinar cuál de las fórmulas de índices de precios es la "mejor" desde la perspectiva del enfoque de muestreo o enfoque estocástico ponderado, se pueden aplicar axiomas nuevamente a cada una de ellas, dando lugar al denominado "segundo enfoque axiomático" (OIT y otros, 2006, pág. 354). Los axiomas que se aplican son los 17 que se presentan en el cuadro I.25.

■ Cuadro I.25
Axiomas aplicables a los índices, de acuerdo con el segundo enfoque axiomático

Denominación	Axioma
C1	Positividad
C2	Continuidad
C3	Identidad o precios constantes
C4	Proporcionalidad respecto de los precios del período corriente
C5	Proporcionalidad inversa respecto de los precios del período base
C6	Invariancia ante variaciones proporcionales de los valores del período corriente
C7	Invariancia ante variaciones proporcionales de los valores del período base
C8	Reversión de productos
C9	Conmensurabilidad
C10	Reversión temporal
C11	Transitividad con respecto a los precios para ponderaciones de valor fijo
C12	Criterio de simetría de las ponderaciones de cantidades
C13	Valor medio de los precios
C14	Monoticidad respecto de los precios del período corriente
C15	Monoticidad respecto de los precios del período base
C16	Ponderación de precios por su propia participación
C17	Irrelevancia de las variaciones de precios con ponderaciones de muy poco valor

Fuente: Organización Internacional del Trabajo (OIT) y otros (2006), *Manual del índice de precios al consumidor: teoría y práctica*, Washington, D.C. [en línea] http://www.imf.org/external/ pubs/ft/cpi/manual/2014/esl/cpi_sp.pdf.

El único índice que cumple los 17 axiomas es el de Theil-Törnqvist. Sin embargo, como se señaló anteriormente, el índice de precios de Törnqvist no cumple el axioma de la reversión de los factores, ni un axioma definido por Fisher, denominado criterio de determinación de los precios: "Un índice de precios no debería tomar el valor cero, infinito, ni quedar indeterminado porque un precio individual adoptó el valor cero. Así, si cualquier producto en 1910 satura el mercado y se transforma en un 'bien gratuito', este hecho no debería llevar a cero el valor del número índice de 1910" (OIT y otros, 2006, pág. 361). Por ello, cuando se utiliza el índice de precios de Törnqvist, "deben tomarse los recaudos para poner cotas que alejen los precios de cero a efectos de evitar que el valor del número índice carezca de sentido" (OIT y otros, 2006, pág. 361).

Llegados a este punto del análisis, destacan como "mejores" índices de precios el de Fisher, el de Törnqvist y el de Walsh, desde los puntos de vista axiomático y estocástico. Resta ahora analizar si también son mejores desde el punto de vista económico.

E. Enfoque económico

> "*Desde el punto de vista de la teoría económica, las cantidades observadas pueden suponerse que son función de los precios, tal como se especifica en alguna función de utilidad o de producción*" (Comisión de las Comunidades Europeas y otros, 1993).

Introducir la perspectiva económica en el análisis de los números índices significa reconocer que las cantidades consumidas o producidas no son variables independientes de los precios; en otros términos, $Q = f(P)$[23]. Y no solo eso, sino que su dependencia se guía de acuerdo con el funcionamiento de lo que postula la teoría económica. Esta, por otra parte, trata de identificar la conducta del consumidor (teoría de la demanda) y la conducta del productor (teoría de la producción), para luego unirlas mediante el funcionamiento del mercado.

La teoría económica neoclásica postula conductas racionales del consumidor y el productor, asumiendo supuestos según los cuales: i) el consumidor tiende a "minimizar costos" y a "maximiza su utilidad", ajustando las cantidades que compra en respuesta a los cambios de los precios relativos de los productos, y ii) el productor tiende también a "minimizar costos" y, al mismo tiempo, "maximiza su producción", ajustando las cantidades que utiliza como insumos o que ofrece como productos en respuesta a los cambios de sus precios relativos.

En ambos casos se trata de problemas de optimización económica: minimizar costos, maximizar beneficios o ambas cosas. En otras palabras, la teoría económica se basa en la conducta optimizadora de los agentes económicos consumidores o productores, quienes reaccionan modificando las cantidades relativas que consumen o producen ante los cambios de los precios relativos.

[23] Como recordaba el profesor argentino Manuel Fernández López (1942-2013), esta relación se la debemos a Antoine Augustin Cournot (1801-1877), quien, en 1841, publicó un tratado de la teoría de las funciones y del cálculo infinitesimal (Cournot, 1841), donde dijo que las cantidades demandadas *Qd* son una función de los precios *f(P)* (ante un aumento de los precios, las cantidades demandadas disminuyen) y que las cantidades ofrecidas *Qo* también son una función de los precios *f(P)* (ante un aumento de los precios, las cantidades ofrecidas aumentan), revolucionando los textos de economía que, hasta ese momento, definían a los precios como una función del cociente entre la demanda y la oferta, *P = f(D/O)*.

Se asume que el conjunto de precios *P* es un conjunto de "datos observados", y el vector de cantidades *Q* es la solución a un problema de minimización de costos y/o de maximización de la utilidad que enfrenta el consumidor, así como la solución a un problema de minimización de costos y/o de maximización de la producción por parte el productor.

A continuación se aborda el enfoque económico desde la perspectiva del consumidor.

1. El "verdadero" índice del costo de vida

Si se compara la canasta de consumo de un consumidor de 2014 con la canasta de consumo de ese mismo consumidor, pero de 2013, se podrán observar los cambios ocurridos en la canasta de consumo. Sucede lo mismo si se efectúa la comparación con la canasta de 2004, cuando el consumidor era diez años más joven.

La comparación entre dos canastas de un mismo consumidor entre dos períodos incluye modificaciones en los precios y en el volumen[24]. Por tanto, la diferencia entre ambas es una diferencia de valor. Para saber cuánto corresponde a la variación de precios y cuánto a los cambios de volumen, se vuelve a plantear el análisis anterior.

Si se desea calcular la variación de precios debería utilizarse alguna de las "mejores" fórmulas, ya sea el índice de Fisher, el de Törnqvist o el de Walsh; son las que cumplen con las propiedades o axiomas y, por lo tanto, tienen sustento estadístico, aunque aún no se ha determinado si tienen sustento económico.

El enfoque económico también postula la existencia de índices de precios "mejores" desde el punto de vista económico, que, desde la perspectiva de la teoría del consumidor individual, son los que se igualan o se aproximan al "verdadero" índice del costo de vida.

El costo de vida es el gasto mínimo que permite alcanzar un cierto nivel de utilidad.

La definición tradicional de utilidad plantea que se trata del sentimiento subjetivo de placer que experimenta una persona como consecuencia de consumir un producto. Partiendo de una definición más elaborada, como la de Jeremy Bentham (1789), la utilidad es aquella propiedad perteneciente a cualquier objeto cuando, por (la tenencia de) sí mismo, tiende a producir beneficios, ventajas, placer, bienestar o felicidad o a prevenir acontecimientos de malicia, dolor o infelicidad[25].

El concepto de utilidad ha sido objeto de controversias, por el grado de abstracción que requiere su comprensión y la dificultad que implica el hecho de que no sea observable. Sin embargo, y siguiendo a Triplett (2000), este se puede asociar al concepto de nivel

24 Los cambios en el volumen abarcan tanto los cambios en las cantidades como en la calidad de los productos.
25 "That property in any object, whereby it tends to produce benefit, advantage, pleasure, good, or happiness [...] or [...] to prevent the happening of mischief, pain, evil or unhappiness".

o estándar de vida[26]. El nivel de vida es tan abstracto e inobservable como el nivel de utilidad, pero genera menos controversias, ya que se trata de un concepto más divulgado y entendible, tanto por los economistas como por las personas que no lo son.

Si se supone un período de inicio *0*, el consumidor individual selecciona una canasta física de productos, que se puede definir como un vector positivo compuesto por los *n* productos: $Q_0^A, Q_0^B, \ldots, Q_0^N$, teniendo en cuenta como restricción su nivel de ingreso disponible (o recta presupuestaria) y los precios P_0 vigentes en el período *0*.

Cada uno de esos *N* productos proporciona un determinado nivel de utilidad o nivel de vida: $U = f(Q)$. El consumidor busca un gasto mínimo C_0 que le permita obtener el máximo nivel de vida teniendo en cuenta su ingreso disponible, sus preferencias y el vector de precios P_0:

$$C_0 = \sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i$$

El índice del costo de vida se define como el cociente de los gastos mínimos entre dos períodos, que permitan mantener al consumidor un mismo nivel de vida dado un determinado vector de precios[27]:

$$ICV_1 = \frac{C^*{}_1}{C_0}$$

Así pues, en la fórmula del índice del costo de vida no solo interviene el gasto mínimo del período *0*, sino también el gasto mínimo de otro período (con el que se realiza la comparación), por ejemplo, el período *1*.

En el período *1*, y ante los precios vigentes en *1* (distintos de los vigentes en *0*), la canasta que le permitiría al consumidor mantener el mismo nivel de vida que tenía en el período *0* es $C^*{}_1$, donde $C^*{}_1 = \sum_{i=1}^{N} P_1^i . Q_0^{i*}$, de modo que:

$$ICV_1 = \frac{C^*{}_1}{C_0} = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_1^i . Q_0^{i*}}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i}$$

Como se puede observar, la canasta de productos Q_0^i no es igual que la canasta Q_0^{i*}; sin embargo, ambas canastas, a pesar de contar con una composición de productos diferentes, tienen en común que proporcionan el mismo nivel de vida (utilidad). Es decir,

---

26 Estrictamente, ambos conceptos no son exactamente sinónimos, ya que una de las características de las funciones de utilidad es que son transformaciones monótonas y establecen relaciones de preferencias homotéticas, lo que implica, entre otras consecuencias, que los gustos y las ponderaciones de los productos consumidos en la canasta no varían según el nivel de ingresos del consumidor. Como se sabe, con cada estándar de vida se corresponden gustos y estructuras de gasto diferentes y, por tanto, es la realidad la que determina la existencia de funciones de utilidad no homotéticas. Sin embargo, como se explica en el apartado 2 de esta sección E, los resultados que se obtienen de los números índices superlativos que son exactos o cercanos a los índices del costo de vida, que se desprenden de diversas funciones de utilidad, no difieren significativamente por considerar las preferencias homotéticas o no hacerlo. Por ello, en este estudio, los conceptos de nivel de utilidad y estándar de vida se utilizan de forma indistinta.

27 El origen de la teoría del índice del costo de vida se atribuye al economista Konüs (1939).

que ante las modificaciones del vector de precios (entre P_0 y P_1), el consumidor individual reacciona intentando mantener constante el nivel de vida obtenido en el consumo, no las cantidades físicas consumidas. Lo que se mantiene constante es el nivel de vida obtenido (su nivel de utilidad), no las cantidades físicas.

Es por ello que la fórmula del índice del costo de vida se expresa también en función del nivel de vida o utilidad U:

$$ICV_1 = \frac{C^*{}_1}{C_0} = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_1^i . Q_0^{i*}}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i} = \frac{e(V_0, P_1)}{e(V_0, P_0)}$$ [28]

Donde:

$e(V_0, P_1)$: función de gasto mínimo del período *1*, que depende del nivel de utilidad V_0 del período *0* y del vector de precios P_1 vigente en el período *1*

$e(V_0, P_0)$: función de gasto mínimo del período *0*, que depende del nivel de utilidad V_0 del período *0* y del vector de precios P_0 vigente en el período *0*

La función de utilidad V que integra la fórmula del gasto mínimo es una función de utilidad indirecta[29].

Si el costo mínimo de mantener el nivel de vida del período *0* aumenta entre *0* y *1* ($C^*_1 > C_0$), el índice del costo de vida aumenta y, en caso contrario ($C^*_1 < C_0$), este disminuye.

Ahora bien, las canastas que integran la fórmula del índice del costo de vida son canastas "inobservables", solo existen en el plano abstracto de la teoría económica. Por ese motivo cabe preguntarse: ¿qué vínculo existe entre las canastas "inobservables" del consumo, C_0 y C^*_1, que integran la fórmula teórica del índice del costo de vida, con las canastas "observables" recogidas en las encuestas sobre el gasto del consumo?, ¿son las mismas canastas o son diferentes? La pregunta se puede plantear también en términos de números índices: ¿coincide el índice del costo de vida que se desprende de la teoría económica "inobservable" con alguno de los índices estadísticos que se obtienen a partir de la realidad "observable" mediante las estadísticas?

---

28 Esta resolución (denominada también Konüs-Laspeyres) implica seleccionar, para la obtención del índice del costo de vida, el nivel de utilidad vigente en el momento *0* (U_0). Un camino alternativo (cuyo resultado del índice del costo de vida se denomina Konüs-Paasche) es elegir el nivel de utilidad vigente en *1* (U_1). En la medida en que exista una correlación negativa entre las variaciones de precios relativos y las de cantidades relativas, el índice de precios de Laspeyres constituye una frontera o cota superior al índice "verdadero" de Konüs-Laspeyres, y el índice de precios de Paasche es una frontera o cota inferior al índice "verdadero" de Konüs-Paasche. De modo similar al analizado en el enfoque de la canasta fija, surge la posibilidad de hacer un promedio entre los índices de Laspeyres y de Paasche, donde el promedio geométrico arroja el índice de precios de Fisher. Para que los índices de Laspeyres/Paasche constituyan una cota superior/inferior, las preferencias de los consumidores (productores) deben ser homotéticas (véase el apartado 2 de esta sección E).

29 Véanse el apartado 2 de esta sección E y el anexo A3. La función de utilidad indirecta es la función de utilidad que se obtiene al reemplazar, en la función de utilidad directa, la fórmula de las cantidades demandadas marshallianas *Xm* u ordinarias, obtenidas en el proceso de maximización de la utilidad. Mientras que la función de utilidad directa depende de las cantidades demandadas ($U=f(q)$), la función de utilidad indirecta V depende del ingreso disponible (restricción presupuestaria I) y del vector de precios p ($V=f(I,P)$).

2. Selección de una canasta de consumo

La elección particular de los productos de la canasta Q por un consumidor depende de muchas variables, entre las que destacan: su nivel de ingresos, su nivel de vida, sus gustos y placeres (preferencias), su entorno físico y social, así como el vector de precios vigente en cada momento.

Todas esas variables influyen en la selección que realiza el consumidor individual en la vida real, en un período 0, de una canasta Q_0^i a los precios vigentes en 0 P_0^i, dando lugar a una canasta integrada por precios y cantidades observables en la realidad $C_0 = \sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i$.

En el momento de partida del análisis, en el período 0, esa canasta C_0 es la misma canasta C_0 que integra el denominador de la fórmula del $ICV = C^*_1 / C_0$, de modo que se puede partir del supuesto de que la canasta C_0 es observable y se puede integrar perfectamente en el terreno de la "inobservable" teoría económica.

A lo largo de la vida del consumidor, se produce el consumo de sucesivas canastas; por ejemplo, en el período 1 el consumidor individual gastará sus ingresos en la canasta $C_1 = \sum_{i=1}^{N} P_1^i . Q_1^i$, con los precios vigentes en 1. Pero, entre los períodos 0 y 1, además de los precios, también puede cambiar el nivel de ingresos del consumidor, sus preferencias, o ambas cosas. Cabe preguntarse entonces si la canasta "observable" C_1, integrada por las cantidades Q_1^i y los precios P_1^i, es la misma canasta "inobservable" C^*_1 que forma parte del numerador en la fórmula del $ICV_1 = {C^*}_1 / C_0$.

La fórmula definida para C^*_1 en el índice del costo de vida era $C^*_1 = \sum_{i=1}^{N} P_1^i . Q_0^{i*}$, que difiere de la canasta $C_1 = \sum_{i=1}^{N} P_1^i . Q_1^i$ en las cantidades de la canasta (Q_0^{i*}, Q_1^i), pero no en los precios.

La diferencia entre ambas canastas es que, en la canasta "inobservable" de cantidades Q_0^{i*}, se supone que el único cambio existente entre los períodos 0 y 1 es el vector de precios P (de P_0 a P_1) que afronta el consumidor individual, mientras que la canasta "observable" de cantidades Q_1^i también puede incluir variaciones en el nivel de ingresos, el nivel de vida o las preferencias del consumidor.

En otras palabras, mientras que el cociente C_1/C_0 "observable" constituye un índice de valor, el cociente C^*_1/C_0 "inobservable" del índice del costo de vida constituye un índice de precios, pero no cualquier índice, sino el "verdadero" índice de precios. En ambos casos, entre 0 y 1 se modifican los precios y las cantidades, pero la diferencia es el nivel de vida que brindan las cantidades. En el caso del índice del costo de vida "inobservable", brindan el mismo nivel de vida en ambos períodos (utilidad constante, véase el gráfico I.3), mientras que las cantidades "observables" brindan un nivel de vida (utilidad) diferente. Con este análisis se responde entonces a la pregunta de si las canastas que integran el índice del costo de vida pueden coincidir con alguna canasta observable: la respuesta es sí en el caso de C_0 y no en el caso de C^*_1.

Queda pendiente la segunda pregunta, esto es, si el cociente C^*_1/C_0 que define el índice del costo de vida, y que incluye el componente "inobservable" C^*_1 en su numerador, coincide o se aproxima a alguna de las fórmulas de los números índices.

Para resolver este interrogante se debe introducir en el análisis la optimización microeconómica en términos de minimización de costos y/o maximización de beneficios, que supone que los agentes económicos (consumidores y productores) tienen una conducta optimizadora.

En la teoría del consumidor individual:

i) El problema de la maximización consiste en seleccionar las cantidades óptimas para el consumo, de modo que hagan máximo el nivel de vida ante el vector de precios existente y dado un determinado nivel de ingresos, que opera como una restricción presupuestaria. En forma analítica puede plantearse como:

$$\max U(Q^0, Q^1), \text{ sujeto a } I = Q^0.P^0{}_0 + Q^1.P^1{}_0$$

ii) El problema de la minimización consiste en seleccionar las cantidades óptimas para el consumo, de modo que minimicen los costos ante el vector de precios existente y dado un determinado nivel de utilidad que se desea alcanzar. Puede formularse como:

$$\min I = Q^0.P^0{}_0 + Q^1.P^1{}_0, \text{ sujeto a } U(Q_0, Q_1)$$

Donde:

$U(Q^0, Q^1)$:	función de utilidad (nivel de vida)
$I = Q^0.P^0{}_0 + Q^1.P^1{}_0$:	ingreso o recta presupuestaria, que resulta de multiplicar las cantidades Q^0 del producto 0 y Q^1 del producto 1 por los precios vigentes en el período *0*

La solución al problema de la maximización de $U(Q^x,Q^y)$ pasa por las cantidades demandadas denominadas "marshallianas" (Q_m) u "ordinarias", mientras que la solución al problema de la minimización pasa por las cantidades "hicksianas" (Q_h) o "compensadas", y en ambos casos la solución matemática se obtiene mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

En el caso de las cantidades demandadas marshallianas Q_m, se obtienen en función de los precios *P* y del ingreso *I*, $Q_m=f(P,I)$, mientras que las cantidades demandadas hicksianas Q_h están en función de los precios *P* y del nivel de utilidad *U*, $Q_h = f(P,U)$.

Como se ejemplifica en el capítulo II y en el anexo A4, las cantidades seleccionadas por las dos vías coinciden, $Q_m = Q_h$, es decir, que la resolución al problema de optimización del consumo da resultados idénticos, ya sea realizando un proceso de maximización de la utilidad o un proceso de minimización de los costos.

La forma matemática de la función de utilidad (nivel de vida) puede ser variada y desconocida. Las formas más comunes que se utilizan en la teoría económica son la función de Leontief, la función Cobb-Douglas, la función de elasticidad de sustitución constante (*constant elasticity of substitution* (*CES*)), la función cuadrática y la función translogarítmica. La cantidad seleccionada dependerá entonces de la función de utilidad que se defina y, obviamente, del vector de precios.

Para entender en forma numérica estos conceptos se ha preparado un ejemplo, con precios y cantidades vigentes en dos períodos, en el que se supone que la función de utilidad del consumidor individual es de tipo cuadrático.

El ejercicio consiste en obtener las cantidades Q_m y Q_h, hallar el índice del costo de vida y, por último, comparar este resultado con los índices estadísticos y verificar si alguno de ellos coincide. De esta forma se intentará responder a la pregunta planteada.

A modo de ejemplo, se ha seleccionado la siguiente función de utilidad cuadrática:

$$U = 4 \,.\, (Q^x)^2 . (Q^y)^2$$

Se ha seleccionado también el vector de precios que se presenta en el cuadro I.26.

■ Cuadro I.26
Datos del ejercicio

	Precio de Q^x	Precio de Q^y
Período 0	10	5
Período 1	11	5

Fuente: Elaboración propia.

El nivel de utilidad del período *0* se ha fijado en un valor igual a *100*, es decir, U_0=100. Si se compara el vector de precios vigente en el período *0* con el del período *1*, se puede observar que el producto Q^X aumenta de precio (pasa de 10 a 11), mientras que el precio del producto Q^y se mantiene en 5.

Dados los vectores de precios vigentes en *0* y en *1*, se deben calcular las cantidades demandadas de Q^x y Q^y de manera que garanticen que el nivel de vida (utilidad) sea igual en ambos períodos (100). Es decir:

$$U = 4 \,.\, (Q^x)^2 . (Q^y)^2 = 100, \text{ con los precios vigentes en } \mathit{0} \text{ y en } \mathit{1}$$

El planteo del problema para el vector de precios vigentes en el período *0* es:

$$\max U_0 = 4 . (Q^x)^2 . (Q^y)^2 = 100, \text{ sujeto a } I = 10 . Q^x + 5 \,.\, Q^y$$

y

$$\min I = 10 . Q^x + 5 \,.\, Q^y, \text{ sujeto a } U_0 = 4 \,.\, (Q^x)^2 . (Q^y)^2$$

Aplicando los multiplicadores de Lagrange[30], se obtienen las cantidades óptimas demandadas:

$$Q_m{}^{31} = Q_h{}^{32} = (Q^x = 1{,}58; Q^y = 3{,}16)$$

[30] En el anexo A3 se realiza el proceso de optimización completo.

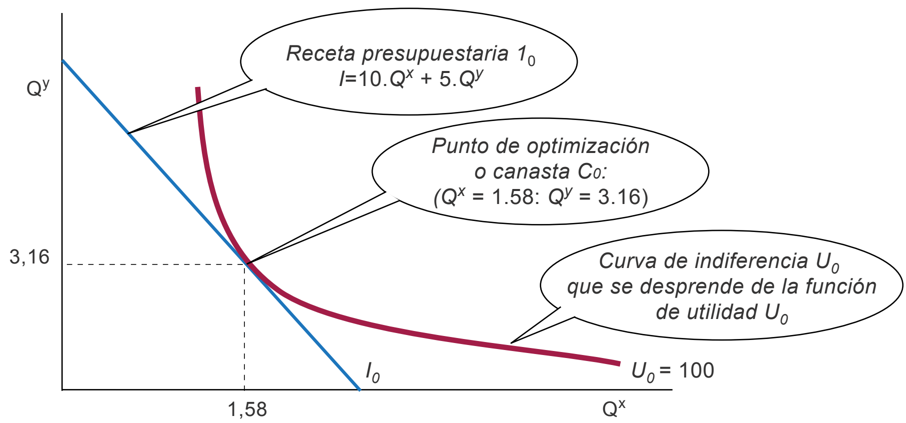
[31] La fórmula que se obtiene de los multiplicadores de Lagrange para calcular las cantidades marshallianas demandadas es Xm = I / (2 x pX) y Ym = I / (2 x pY).

[32] La fórmula que se obtiene de los multiplicadores de Lagrange para calcular las cantidades hicksianas demandadas es Xh = (U x pY^2 / 4 x pX^2)$^{1/4}$ y Yh = (U x pX^2 / 4 x pY^2)$^{1/4}$.

Si se multiplican los precios por las cantidades[33], en el período *0* se obtiene el gasto mínimo C_0 = 31,6 que permite acceder al nivel de vida (utilidad), valorado en 100 (U_0 = 100), que se iguala al ingreso disponible en *0* (recta I_0).

Gráficamente, el problema se resuelve en el espacio de las cantidades (véase el gráfico I.1). Dados los precios vigentes en el período *0* (10 para el producto Q^x y 5 para el producto Q^y), la recta presupuestaria o del ingreso disponible I_0 y las curvas de indiferencia que se desprenden de la función de utilidad U, la solución geométrica del punto de optimización o canasta C_0 (observable) seleccionada en el período *0* se encuentra en la curva de indiferencia U_0, tangente a la recta presupuestaria I_0.

■ Gráfico I.1
Resolución gráfica del multiplicador de Lagrange



Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico I.2, el aumento de precios del producto Q^x de 10 a 11 se señala con un desplazamiento de la recta presupuestaria I hacia abajo (de I_0 a I_1), manteniendo su intersección con el eje de ordenadas Y en el mismo punto que en el gráfico I.1 (ya que el precio del producto Q^y no varía) y desplazando el cruce con el eje de abscisas X hacia la izquierda (el precio del producto Q^x aumenta). La nueva canasta C_1 (observable) seleccionada como punto de optimización arroja un consumo de 3,16 unidades para Q^y y 1,44 unidades para Q^x [34], reflejando una disminución del consumo del producto Q^x (de 1,58 a 1,44) originado en el aumento de su precio.

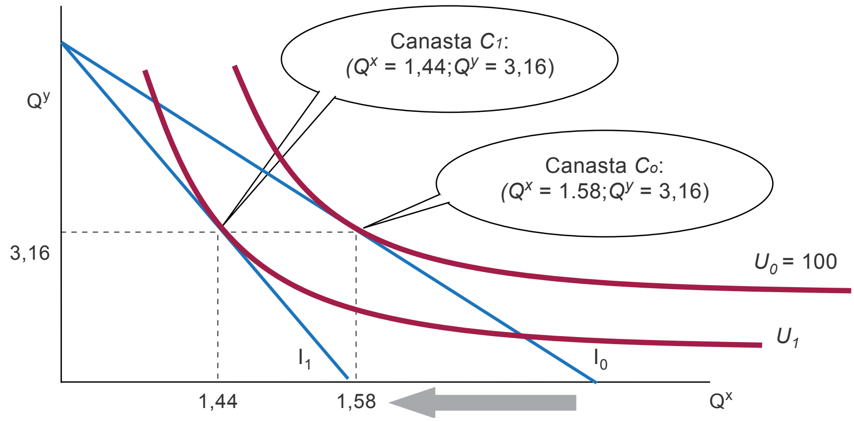
---

33 10 x 1,58 + 5 x 3,16.

34 Con el mismo ingreso disponible (31,6), y ante el aumento de precios de 10 a 11 del producto Q^x, la canasta de consumo es 11 x 1,44 + 5 x 3,16. Gráficamente, I0 se desplaza hacia I1, para denotar el cambio en el precio del producto Q^x, y las modificaciones de la pendiente de la recta de presupuesto I se originan en los cambios de los precios relativos de los productos Q^x respecto de Q^y.

■ Gráfico I.2

Nueva situación: aumento del precio del producto Q^x



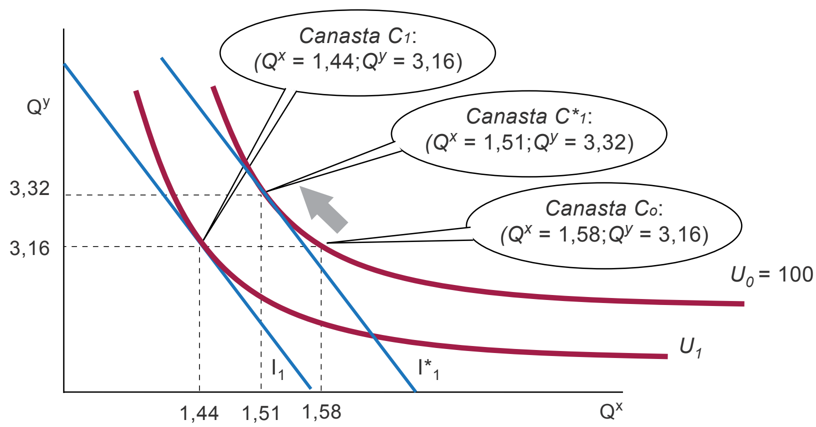
Fuente: Elaboración propia.

Asimismo, se puede observar que, en la nueva situación C_1, la curva de indiferencia U_1 está ubicada hacia abajo y más a la izquierda que U_0, lo que significa que el nuevo nivel de utilidad (estándar de vida) es inferior al valor 100 que se desprende de U_0[35].

Como se expresó anteriormente, el cálculo del índice del costo de vida requiere estimar la canasta "inobservable" C^*_1. Gráficamente, implica el desplazamiento de una recta de presupuesto paralela a I_1 (denominada I^*_1), tangente a la curva de indiferencia original U_0, que se desprende de la función de utilidad U_0 (véase el gráfico I.3).

■ Gráfico I.3

Representación gráfica de la nueva canasta inobservable



Fuente: Elaboración propia.

[35] El valor del nivel de utilidad obtenido con la curva de indiferencia U1 es 82,65.

Con el vector de precios vigente en *1*, las cantidades óptimas demandadas son: $Q_m = Q_h = (Q^x = 1{,}51; Q^y = 3{,}32)$. Multiplicando los precios vigentes en *1* por dichas cantidades demandadas, se obtiene el gasto mínimo (inobservable) $C^*_1 = 33{,}2$, que permite acceder al mismo nivel de vida (utilidad) vigente en *0* e igual a 100 ($U_0 = 100$). Ello se muestra en el gráfico I.3, donde se puede ver que la canasta observable C_0 y la canasta inobservable C_1 se ubican sobre la misma curva de indiferencia U_0, produciéndose un movimiento "a lo largo" de la curva U_0.

Como se puede observar, ante el aumento del precio del producto Q^x (de 10 a 11), el consumidor individual reacciona disminuyendo el consumo del producto Q^x y aumentando el consumo del producto Q^y. El valor exacto de la modificación de las cantidades depende de la definición de la función de utilidad *U*, que en este caso es cuadrática.

■ Recuadro I.1
Efecto sustitución y efecto ingreso según Hicks

El efecto en el consumo originado en el aumento del precio del producto Q^x es una disminución de -0,14 unidades, ya que el consumo pasa de 1,58 unidades a 1,44 unidades. Ese efecto se denomina efecto total. Por otra parte, el consumidor sigue demandando las mismas unidades del producto Q^y (3,16 unidades, efecto total igual a 0). La diferencia entre las cantidades demandadas en la canasta original C_0 y las demandadas en la canasta C^*_1 determinan el denominado "efecto sustitución" según Hicks. La canasta C^*_1 responde a la pregunta ¿qué canasta elegiría el consumidor si mantuviese constante e igual su nivel de utilidad frente a la nueva relación de precios P_1? En cuanto al producto Q^x, la respuesta es igual a 1,51 unidades, lo que implica una diferencia de -0,07 unidades (1,51 - 1,58 = -0,07). Con respecto al producto Q^y, la respuesta es 3,32 unidades, esto es, existe una diferencia de 0,16 unidades (3,32 - 3,16 = 0,16). La diferencia entre el efecto total y el efecto sustitución es el denominado "efecto ingreso": en el producto Q^x es de -0,07 unidades (-0,14 – (-0,07) = -0,07) y en el producto Q^y es de -0,16 unidades (0 – 0,16 = -0,16). En el "efecto sustitución" el consumidor se desplaza "a lo largo" de la curva de indiferencia C0, de modo que mantiene su nivel de utilidad (estándar de vida). Para que esto sea viable, es necesario suponer que el consumidor recibe una compensación monetaria "imaginaria", a fin de que pueda mantener su ingreso monetario y el mismo nivel de utilidad (estándar de vida) ante el nuevo vector de precios P_1.

Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenidos los valores de C_0 y C^*_1, se puede obtener el cociente del índice del costo de vida:

$$ICV_1 = \frac{C^*{}_1}{C_0} = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_1^i . Q_0^{i*}}{\sum_{i=1}^{N} P_0^i . Q_0^i} = \frac{33{,}2}{31{,}6} = 1{,}049$$

El índice del costo de vida aumenta un 4,9% entre el período *0* y el período *1*. En el gráfico I.3 se puede observar la composición de las dos canastas que se comparan en el ICV_1, la canasta C_0 y la canasta C^*_1.

Con los datos de los precios y las cantidades demandadas obtenidas se pueden aplicar las fórmulas de los índices de precios, y comparar los resultados con el índice del costo de vida, como se presenta en el cuadro I.27.

Cuadro I.27

Índice de costo de vida según diferentes fórmulas de índices de precios

Índice de precios de Laspeyres	Índice de precios de Paasche	Índice de Precios de Fisher	Índice geométrico de Laspeyres	Índice geométrico de Paasche	Índice de precios de Lloyd Moulton[a]	Índice de precios de Törnqvist	Índice de precios de Walsh
1,05000	1,04762	1,04881	1,04881	1,04881	1,04881	1,04881	1,04881

Fuente: Elaboración propia.
[a] σ tiende a 1.

Como se puede observar, las fórmulas de los índices de precios de Fisher, de Lloyd Moulton, de Törnqvis y de Walsh, así como las de los índices geométricos de Laspeyres y de Paasche, coinciden en un crecimiento del 4,9% del índice del costo de vida.

De todas estas fórmulas, el índice exacto es el índice de precios de Fisher (que se muestra destacado en el cuadro I.27), ya que “si las preferencias pueden representarse mediante una función de utilidad cuadrática homogénea, el índice de Fisher proporciona una medición exacta del ICV [índice del costo de vida]” (OIT y otros, 2006). Por ese motivo, el índice de precios de Fisher es un índice “exacto”, pues arroja un resultado exacto, esto es, la evolución exacta del índice del costo de vida que se desprende de la función de utilidad cuadrática.

De forma análoga, se pueden definir otros índices “exactos” para los índices del costo de vida que se desprenden de otras funciones de utilidad, como se detalla en el cuadro I.28.

Cuadro I.28

Índices de precios exactos para diferentes índices de costo de vida que se desprenden de funciones de utilidad

Índice de precios	Función de utilidad de la que se desprende el índice del costo de vida
Índice de precios de Fisher	Cuadrática
Índice de precios de Törnqvist	Translogarítmica
Índice geométrico Laspeyres (IGL)	Cobb-Douglas
Índice de precios de Lloyd Moulton	De elasticidad de sustitución constante
Índice de precios de Laspeyres /Índice de precios de Paasche	De Leontief

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presentan ejemplos para cada una de esas funciones (véase el cuadro I.29)[36]. En cada caso se muestra destacado el índice de costo de vida y el índice de precios exacto.

[36] Véase un análisis similar en Delfino (2002).

■ Cuadro I.29

Resultados de los principales índices de precio para funciones de utilidad seleccionadas

A. Función de utilidad de Cobb-Douglas

Función de utilidad	Parámetros		Cantidades		U	$e(P,U)$	$\frac{e_1}{e_0}$
Cobb-Douglas $f(Q^x,Q^y)=U=A.(Q^x)^\alpha.(Q^y)^\beta$	A	10	Q^x	Q^y			
	α	0,6	8,91	11,88	100	148,6	
	β	0,4	8,58	12,58	100	157,3	1,05885

IPL	IPP	IPF	IGL	IGP	IPLM[a]	IPT	IPW
1,06000	1,05769	1,05885	1,05885	1,05885	1,05885	1,05885	1,05885

[a] σ tiende a 1.

B. Función de utilidad de elasticidad de sustitución constante

Función de utilidad	Parámetros		Cantidades		U	$e(P,U)$	$\frac{e_1}{e_0}$
CES $f(Q^x,Q^y)=U=A.[\alpha.(Q^x)^{-\rho}+\beta.(Q^y)^{-\rho}]^{\frac{-v}{\rho}}$	A	1	Q^x	Q^y			
	α	0,3					
	β	0,7	41,32	153,04	100	1.178,4	
	v	-0,17647	39,21	157,47	100	1.218,6	1,03414
	ρ	1					

IPL	IPP	IPF	IGL	IGP	IPLM[a]	IPT	IPW
1,03506	1,03324	1,03415	1,03398	1,03414	1,03414	1,03414	1,03415

[a] σ=0,85.

C. Función de utilidad translogarítmica

Función de utilidad	Parámetros		Cantidades		U	$e(P,U)$	$\frac{e_1}{e_0}$
TRANSLOG	A	1	Q^x	Q^y			
$ln(U(Q^x,Q^y))$	α_x	0,5					
$=ln(A)$	α_y	0,5	73,34	137,72	100	1.422	
$+\alpha_x\, ln(Q^x)$	β_{xy}	0,0125	70,33	144,02	100	1.493,8	1,05049
$+\alpha_y\, ln(Q^y)$	β_{yx}	0,0125					
$+[\beta_{xy}.ln(Q^x).ln(Q^y)$	β_{xx}	-0,0125					
$+\beta_{yx}.ln(Q^x).ln(Q^y)+\beta_{xx}.ln(Q^x)^2+\beta_{yy}.ln(Q^y)^2]$	β_{yy}	-0,0125					

IPL	IPP	IPF	IGL	IGP	IPLM[a]	IPT	IPW
1,05157	1,04941	1,05049	1,05038	1,0560	1,05049	1,05049	1,05049

[a] σ=0,91.

Cuadro I.29 (conclusión)

E. Función de utilidad de Leontief

Función de utilidad	Parámetros		Cantidades		U	$e(P,U)$	$\frac{e_1}{e_0}$
			Q^x	Q^y			
Leontief $f(Q^x,Q^y)=U=(\frac{Q^x}{\alpha};\frac{Q^y}{\beta})$	α	0,4	40	60	100	700	
	β	0,6	40	60	100	740	1,05714

IPL	IPP	IPF	IGL	IGP	IPLM[a]	IPT	IPW
1,05714	1,05714	1,05714	1,05597	1,05831	1,05597	1,05714	1,05714

Fuente: Elaboración propia.

[a] σ tiende a 1.

Como se puede observar, el resultado depende de la función de utilidad que, supuestamente, racionaliza la conducta del consumidor; habrá tantas soluciones para el índice del costo de vida como funciones de utilidad se suponga que existen. Se podría adelantar, entonces, la siguiente propuesta: "deme usted su función de utilidad y yo le doy el índice de precios que guarda correspondencia, de forma exacta, con el índice del costo de vida".

Como ya se señaló, la teoría económica descarta las funciones de utilidad que postulan que el consumidor individual no reacciona modificando las cantidades demandadas ante las variaciones de los precios, o que reacciona siempre igual ante dichas modificaciones, independientemente del nivel de consumo o de la escala. El grado de reacción de un consumidor individual ante las modificaciones de los precios se mide, en la teoría económica, con el concepto de elasticidad de sustitución:

> "La *elasticidad de sustitución*, denominada σ, es una medida del cambio en la cantidad, por ejemplo, del artículo *i* en relación con el artículo *j*, que tendría lugar a partir de un cambio unitario en el precio del artículo *i* en relación con el precio del artículo *j*. Un valor de cero implica que un cambio en el precio no provocaría ninguna sustitución entre el gasto en los artículos y σ > 1 implica que el cambio en el consumo que resultaría de la sustitución de artículos sería positivo: vale la pena el cambio" (OIT y otros, 2006, apéndice 8.2, párr. 1).

En el caso extremo, está, por ejemplo, el consumidor "tipo Leontief", que no reacciona ante las modificaciones de los precios (su elasticidad de sustitución σ es igual a 0), manteniendo su canasta de demanda de consumo exactamente igual. Es por ello que la función de utilidad de Leontief queda descartada[37] como función representativa de la conducta de los consumidores.

[37] Aunque podría suponerse que, con determinados grupos de productos, el consumidor racionaliza su conducta siguiendo pautas "a la Leontief", demandando la misma cantidad ante las modificaciones de los precios. Este tipo de conductas puede aplicarse a aquellos bienes que se consideran "inelásticos" o poco flexibles a las modificaciones de sus precios, como los medicamentos, los combustibles y los "vicios" (las drogas o las bebidas alcohólicas), es decir, las variaciones importantes de los precios no dan lugar a modificaciones en las cantidades demandadas por motivos de necesidad en el consumo.

También se considera "improbable que las preferencias de los consumidores se ajusten exactamente" a la forma funcional cuadrática (OIT y otros, 2006, pág. 13).

Por otra parte, aunque se siguen utilizando, las formas funcionales Cobb-Douglas y de elasticidad de sustitución constante han perdido popularidad, entre otras razones, por imponer *a priori* valores fijos para las elasticidades de sustitución (*1* en el caso de la función Cobb-Douglas y constante en la elasticidad de sustitución constante)[38].

La función translogarítmica[39] y otras formas funcionales, como la Cobb-Douglas generalizada o la Box-Cox generalizada, han ganado terreno, ya que se caracterizan por no imponer restricciones en los valores de la elasticidad de sustitución y se acercan más a la realidad.

Diewert (1976) demostró que los índices de precios de Fisher, de Törnqvist y de Walsh son índices superlativos, cuando estos índices estadísticos son exactos para un índice del costo de vida basado en "cierta forma funcional y además cuando esa forma funcional es flexible"[40] (OIT y otros, 2006, pág. 14). Las funciones flexibles son aquellas que pueden dar una aproximación de segundo orden a otras funciones dos veces diferenciables en torno a un mismo punto o dentro de un determinado rango de valores[41].

En ese sentido, las funciones cuadrática y translogarítmica pueden dar una "aproximación diferencial de segundo orden a una vasta gama de funciones de utilidad de tipo neoclásico" (Maletta, 1996, pág. 39). Estos índices se consideran como "muy cercanas aproximaciones del 'verdadero índice del costo de vida' de los consumidores, aun relajando el supuesto que estos maximizan su utilidad en formas compatibles con la teoría de la demanda, y aun cuando la función de demanda no haya sido especificada ni estimada" (Maletta, 1996, pág. 39).

Generalmente, como la función de utilidad se encuentra en el plano de lo inobservable, su forma matemática es desconocida, de modo que, si se procede a calcular alguno de los índices superlativos (índices de Fisher, de Törnqvist o de Walsh), se puede tener la certeza de que constituyen "una aproximación bastante buena al ICV [índice del costo de vida] subyacente en un amplio rango de circunstancias" (OIT y otros, 2006, pág. 14) y que, por tanto, se aproximan a los resultados de un índice del costo de vida subyacente con una función de utilidad desconocida.

---

38 Según las simulaciones realizadas en un laboratorio, que utilizaron precios elementales en los Estados Unidos en el período que va de diciembre de 1986 a diciembre de 2000, los valores de la elasticidad de sustitución son inestables en el tiempo y se situaron en un rango de entre 0,06 y 2,78. Véase Cage, Greenlees y Jackman (2013), *Introducing the Chained Consumer Price Index*, París, Francia. Por otra parte, Maletta (1996) menciona que "[l]a mayor parte de los estudios empíricos en diferentes países y períodos, con diferentes supuestos sobre la conducta del consumidor, han encontrado elasticidades de sustitución con valores concentrados entre 0,3 y 1,5. Sólo algunos bienes con demanda muy rígida (como la sal) tienen elasticidades de sustitución cercanas al cero, y solo para bienes muy sustituibles las elasticidades de sustitución son mayores que 2".

39 Christensen, Jorgenson y Lau (1975) introdujeron esta función en la literatura económica.

40 Este término es introducido por Diewert (1974, pág. 133).

41 Dada una función arbitraria f*, en la clase de funciones homogéneas hay una función cuadrática homogénea f(q1, ... qn) = $\sqrt{\sum\sum a_{ik} \cdot q_i \cdot q_k}$, que constituye una aproximación de segundo orden a f* en un entorno de q*. Entonces, f es flexible, de modo que el nivel y todas las derivadas parciales de primer y segundo orden coinciden en q*.

Los resultados prácticos de la aplicación de los índices superlativos de Fisher y de Törnqvist indican que todas las comparaciones bilaterales (entre dos períodos, por ejemplo *0* y *1*) "difieren apenas en un 0,1% en promedio", por lo que es de esperar que sus resultados sean "muy similares" y que "para datos de series temporales 'normales', estos tres índices arroj[e]n prácticamente la misma respuesta" (OIT y otros, 2006, págs. 379 y 380).

Así pues, esa idea se puede sintetizar de la siguiente manera: "no me interesa cuál es su función de utilidad, pues calculando un índice superlativo tengo la certeza de hallar un resultado que se aproxima al índice del costo de vida subyacente, que se desprende de una amplia gama de funciones de utilidad". Como afirma Maletta (1996, pág. 61), "si todos los índices ideales arrojan resultados muy similares, y cada uno de ellos es exacto o superlativo para varias funciones de utilidad frecuentemente utilizadas, la especificación y estimación de la función de utilidad deja de ser un requisito para estimar el índice del costo de vida".

Los índices superlativos de Fisher, de Törnqvist y de Walsh son "los mejores", pues cuentan con un sustento económico, axiomático y estocástico. En general, estos índices superlativos se encuentran dentro del rango que definen los índices de Laspeyres y de Paasche. En efecto, desde la perspectiva del consumidor, el índice de precios de Laspeyres constituye un techo del índice del costo de vida, y el índice de precios de Paasche constituye un piso[42].

Desde la teoría del productor, los términos se invierten, constituyendo el índice de precios de Paasche un techo y el índice de precios de Laspeyres un piso[43]. Esos sesgos se deben al hecho de que estos índices no incorporan el efecto de sustitución.

En los Estados Unidos, la denominada Comisión Boskin[44] suscitó un gran debate respecto de los sesgos de medición del IPC y centró su atención en tres problemas fundamentales: el efecto de sustitución en el consumo, los cambios de calidad en los productos y la introducción de productos nuevos (Johnson, Reed y Stewart, 2006). La conclusión de dicha Comisión fue que el IPC de los Estados Unidos tenía un sesgo total al alza de 1,1 puntos por año, en un país con un incremento anual promedio del nivel general de precios al consumidor del 3% en esos años. El sesgo de sustitución incluido dentro del 1,1% se estimó en un 0,4% (Johnson, Reed y Stewart, 2006, págs. 11 y 12).

42 Para que ello se verifique, es necesario que las cantidades y los precios evolucionen en sentido contrario, esto es, si los precios suben las cantidades deben disminuir.

43 Para que ello se verifique, es necesario que las cantidades y los precios evolucionen en el mismo sentido, esto es, si los precios suben las cantidades también deben aumentar.

44 Comisión consultiva establecida en 1995 por el Comité de Finanzas del Senado, encargada del estudio del índice de precios al consumidor (IPC) de los Estados Unidos.

■ Recuadro I.2
Funciones de utilidad homotéticas e índice del costo de vida

En la definición del índice del costo de vida no solo intervienen los precios *P*, sino también la función de utilidad indirecta *V*, ya que *V* es un argumento de la función de costo mínimo *e*:

$$ICV_1 = \frac{C^*{}_1}{C_0} = \frac{e(V_0, P_1)}{e(V_0, P_0)}$$

Para que el índice del costo de vida sea coincidente de forma exacta con alguna de las fórmulas de los índices de precios, se debe poder despejar *V* de la fórmula del índice del costo de vida y, para ello, el requisito es que *V* sea una función de utilidad homotética. De esta manera, el índice del costo de vida es independiente del nivel de utilidad de referencia del que se parta (arrojará el mismo resultado con independencia de que el nivel de utilidad de partida sea alto o bajo).

Shephard (1953) define una función homotética como "la transformación monotónica de una función linealmente homogénea" (OIT y otros, 2006, pág. 369, nota 8). Una función es homogénea de grado *k* si, al multiplicar todos los productos por una misma constante λ, la utilidad queda multiplicada por λ^k. La expresión matemática sería: $f(\lambda Q^x, \lambda Q^y) = \lambda^k f(Q^x, Q^y)$. Las funciones homotéticas son aquellas en las que las curvas de indiferencia tienen la misma forma, ya que cada una es una contracción o expansión uniforme de la otra (las curvas no se cortan entre sí), de modo que las pendientes de las curvas de indiferencia (las tasas marginales de sustitución entre productos) son iguales a lo largo de cualquier línea recta que parta desde el origen. Esta situación se conoce en la literatura económica como el supuesto de las preferencias homotéticas. Estas determinan que:

- cuando existan rendimientos constantes a escala en términos de utilidad, si se duplica el consumo de los productos que integran la canasta del consumidor, el nivel de utilidad también se duplicará, en todos los puntos de la función;

- si se duplica el precio de los productos y se duplica también el ingreso del consumidor, se espera que el punto óptimo que determina la canasta consumida inicialmente no se altere, esto es, el comprador adquiriría las mismas cantidades de productos que en la situación inicial;

- si se duplica el ingreso y los precios no se modifican, el comprador adquiriría el doble de cantidades que en la situación inicial, manteniendo la misma estructura de gasto que en la situación inicial.

El concepto de función homotética también se aplica a los costos, y significa que es posible separar y obtener los costos totales mediante la multiplicación de la función de utilidad *V* por la función de costos unitaria *e(P)*:

$$C_0 = V_0 \,.\, e(P_0)$$

Por tanto, el índice del costo de vida se determina por:

$$ICV_1 = \frac{C^*{}_1}{C_0} = \frac{e(V_0, P_1)}{e(V_0, P_0)} = \frac{V_0 \,.\, e(P_1)}{V_0 .\, e(P_0)} = \frac{e(P_1)}{e(P_0)}$$

El índice del costo de vida deja de ser un cociente de gastos para pasar a ser un cociente de precios, y la función de utilidad ha desaparecido del argumento, de modo que se puede expresar índice del costo de vida en términos cardinales. Asimismo, esto significa que, por ejemplo, si se duplican los precios de los productos que integran la canasta, se duplica también el índice de costo de vida (rendimientos de costos constantes a escala), con independencia del nivel de utilidad del que se parta.

Recuadro I.2 (conclusión)

Aunque este supuesto de preferencias homotéticas "no se justifica estrictamente desde el punto de vista del comportamiento económico real" (OIT y otros, 2006, párr. 17.18), ya que supone "iguales estructuras de gastos para todos los niveles de ingresos" (Maletta, 1996, pág. 10), "es posible observar que el supuesto de homoteticidad no suele generar resultados engañosos desde el punto de vista empírico en el contexto de los números índice" (OIT y otros, 2006, pág. 369, nota 9).

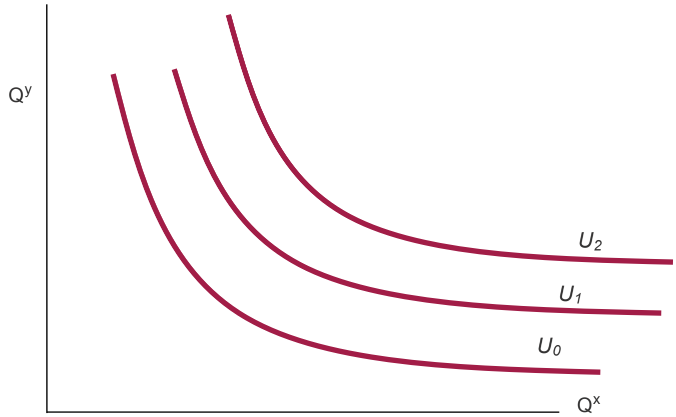
Si se suponen preferencias no homotéticas, el rendimiento es variable de acuerdo al punto del cual se parta, de modo que, en algunos puntos de la función, el rendimiento puede ser constante a escala, en otros puede ser creciente o decreciente y, más acorde a la realidad, las estructuras de gastos son variables según los distintos niveles de ingreso. En este caso, se justifica el uso del índice de Törnqvist-Theil (OIT y otros, 2006, págs. 369 y 378). Dado que este índice es superlativo y, además, como ya se ha mencionado, arroja resultados muy similares a los demás índices superlativos (índices de precios de Fisher y de Walsh), el índice del costo de vida no diferirá significativamente porque se supongan preferencias homotéticas o no. De hecho, como afirma Maletta (1996), en el caso de las funciones indirectas de utilidad translogarítmicas no se requiere que sean homotéticas (Christensen, Jorgenson y Lau, 1975, pág. 368) y Diewert (1976, págs. 122 y 123) es quien demuestra que el índice de Törnqvist-Theil es exacto para la forma funcional translogarítmica no homotética.

En conclusión, las fórmulas superlativas de los números índices de Fisher, de Törnqvist y de Walsh arrojan resultados similares para el índice del costo de vida, con independencia de la forma matemática de la función de utilidad, de si se trabaja con el supuesto de preferencias homotéticas o no, o de si los consumidores han modificado su canasta de consumo.

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de Organización Internacional del Trabajo (OIT) y otros (2006), *Manual del índice de precios al consumidor: teoría y práctica*, Washington, D.C. [en línea] http://www.imf.org/external/ pubs/ft/cpi/manual/2014/esl/cpi_sp.pdf; H. Maletta, "Sustitución en el consumo, medición del costo de vida y tipo de cambio real en la Argentina, 1960-1995", Buenos Aires, inédito, 1996; L. Christensen, D. Jorgenson y L. Lau, "Transcendental Logarithmic Utility Functions", *The American Economic Review*, vol. 65, Nº 3, American Economic Association, 1975 [en línea] http://www.jstor.org/stable/1804840, y W. E. Diewert, "Exact and superlative index numbers", *Journal of Econometrics*, Nº 4, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1976 [en línea] http://www.researchgate.net/publication/4856926_Exact_and_superlative_index_numbers.

■ Gráfico I.4

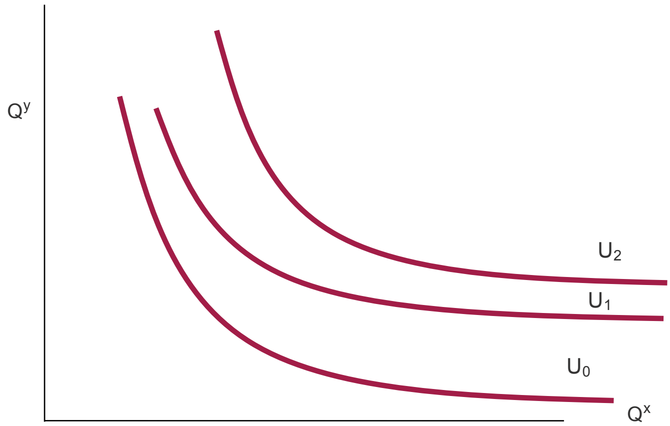
Funciones con preferencias homotéticas



Fuente: Elaboración propia.

■ Gráfico I.5

Funciones con preferencias no homotéticas



Fuente: Elaboración propia.

Capítulo II

Comparación directa y punto de vista del productor

Las aproximaciones que se realizaron desde la óptica del consumidor también se pueden utilizar para el punto de vista del productor, por lo que se puede repetir el análisis desde los enfoques axiomático, estocástico y económico. No obstante, es necesario precisar algunas cuestiones sobre el enfoque económico.

La teoría del índice del costo de vida expuesta en el capítulo anterior presupone que los consumidores tienen un comportamiento optimizador y que son tomadores de precios[1]. La teoría de los índices de precios (IP) desde el punto de vista del productor[2] presupone la existencia de una estructura de mercado de competencia perfecta, y que los productores tienen un comportamiento optimizador y son tomadores de precios.

Si se parte de estructuras de mercado distintas de la competencia perfecta (como la competencia monopolística, el monopolio o el oligopolio), las acciones del productor pueden repercutir en los precios prevalecientes. Por lo tanto, el enfoque económico, tal como se presenta, no resulta válido y debe modificarse para incorporar esas situaciones.

Como se afirmó más arriba, introducir la perspectiva económica en el análisis de los números índices significa reconocer que las cantidades consumidas o producidas no son variables independientes de los precios. El comportamiento optimizador y racional que se le supone al productor lo lleva a "minimizar costos" y, al mismo tiempo, a "maximizar su producción", ajustando las cantidades que utiliza como insumos o que ofrece como productos en respuesta a los cambios de sus precios relativos.

---

1 Esta teoría fue elaborada por Konüs (1939).
2 Elaborada por Fisher y Shell (1972), y por Archibald (1977).

Desde la óptica del productor, interesa estimar lo siguiente: i) la función de producción, que representa la relación tecnológica industrial entre el producto (*output*) y los insumos o factores (*inputs*) y, en ese marco, los rendimientos a escala y el nivel de la producción; ii) la función de costos, que permite determinar el costo mínimo de producción para una determinada canasta de productos; iii) los rendimientos a escala y los costos, y iv) la elasticidad de sustitución entre los factores (*inputs*).

Estos mismos conceptos también se pueden definir en la teoría del consumidor (de hecho, algunos de ellos se examinaron en el capítulo I). Cabe establecer las siguientes asociaciones: el concepto de utilidad U se reemplaza por el de producción Q; la función de utilidad $U(Q^x,Q^y)$ se reinterpreta como la función de producción $Q(Q^K,Q^L)$; los productos que integran la canasta de consumo, Q^x y Q^y, se reemplazan por los factores de producción (o insumos), Q^K y Q^L (capital y trabajo, respectivamente); y los precios de los productos, P^x y P^y, se sustituyen por los precios de los factores, P^{QK} y P^{QL}. Por último, es importante señalar que, mientras que el nivel de utilidad U es inobservable, el nivel de producción Q es observable.

La forma funcional que puede adoptar la función de producción guarda analogía con lo ya expuesto para el punto de vista del consumidor. Así pues, se pueden utilizar las fórmulas de Leontief, cuadrática, de elasticidad de sustitución constante, Cobb-Douglas o translogarítmica.

El análisis de la función de producción desde una perspectiva microeconómica se realizará mediante la aplicación de una función de producción $f(K,L)$[3] de elasticidad de sustitución constante:

$$f(K, L) = Q = A * (\alpha * K^{-\rho} + \beta L^{-\rho})^{-v/\rho}$$

Donde:

K: factor capital

L: factor trabajo

Q: cantidades producidas

A: parámetro que refleja la tecnología

α: parámetro de proporción del factor K respecto del ingreso total

β: parámetro de proporción del factor L respecto del ingreso total ($\alpha + \beta = 1$)

[3] Esta función de producción se denomina también directa, y depende de los factores productivos $Q = f(K,L)$. Se diferencia de la función de producción indirecta en que depende del precio de los factores productivos y del presupuesto disponible para remunerar esos factores, por su participación en el proceso productivo $Q = G(R, PK, PL)$.

ρ: parámetro que se vincula a la elasticidad parcial de sustitución σ_{KL} de Allen, donde $\rho = (\sigma-1) / \sigma$

ν: parámetro de economía de escala o de grado de homoteticidad de la función, de manera que, si $\nu = 1$, implica rendimientos a escala constantes (función homogénea de grado 1), si $\nu < 1$, implica rendimientos a escala decrecientes (función homogénea de grado n < 1) y, si $\nu > 1$, implica rendimientos a escala crecientes (función homogénea de grado n > 1)

Sean los siguientes valores para la función de elasticidad de sustitución constante:

$$Q = 1 * (0{,}3\ K^{-0{,}17647} + 0{,}7\ L^{-0{,}17647})^{-(1\ /\ 0{,}17647)}$$

En consecuencia, A = 1, $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}7$ (se verifica que $\alpha + \beta = 1$), $\rho = 0{,}17647$ (por tanto, $\sigma_{KL} = 0{,}85$) y $\nu = 1$, de modo que se trata de una función de rendimientos constantes a escala y homogénea de grado 1.

Se puede despejar *L*, de modo que, si *L=f(Q,K)*:

$$L = (Q\ \wedge{}^{-0{,}17647/1}\ - 0{,}3 * K^{-0{,}17647}) / 0{,}7)^{-1\ /\ 0{,}017647}$$

Así, por ejemplo, partiendo de una situación inicial con un nivel de producción de 100 unidades (Q=100) y un uso de insumos de K de 100 unidades (K=100), se puede obtener, mediante la fórmula de la función de producción de elasticidad de sustitución constante, cuántas unidades se requieren del factor L (véase el cuadro II.1). El resultado es que se necesitan 100 unidades de L.

■ Cuadro II.1
Situación inicial

Q	α	β	K	L
100	0,3	0,7	100	100

Fuente: Elaboración propia.

Si se aumenta en una unidad, sucesivamente, el consumo del factor K, se puede calcular la disminución relativa del factor L (véase el cuadro II.2)[4].

■ Cuadro II.2
Aumento sucesivo de una unidad en el factor K

Q	α	β	K	L
100	0,3	0,7	100	100,00
100	0,3	0,7	101	99,57
100	0,3	0,7	102	99,16
100	0,3	0,7	103	98,75
100	0,3	0,7	104	98,34
100	0,3	0,7	105	97,94
100	0,3	0,7	106	97,55
100	0,3	0,7	107	97,17
100	0,3	0,7	108	96,79
100	0,3	0,7	109	96,41
100	0,3	0,7	110	96,04
100	0,3	0,7	111	95,68
100	0,3	0,7	112	95,32
100	0,3	0,7	113	94,97
100	0,3	0,7	114	94,63
100	0,3	0,7	115	94,28
100	0,3	0,7	116	93,95
100	0,3	0,7	117	93,62
100	0,3	0,7	118	93,29
100	0,3	0,7	119	92,96
100	0,3	0,7	120	92,65
100	0,3	0,7	121	92,33

Fuente: Elaboración propia.

Si se duplica la dotación de capital y de trabajo para cada nivel de los datos de K y L que figuran en el cuadro II.2, se comprueba que la producción Q se duplica (rendimientos constantes a escala) (véase el cuadro II.3).

4 La producción hace un uso más intensivo del capital y menos intensivo del trabajo.

■ Cuadro II.3
Duplicación de los factores K y L

K	*L*	*Q*
200	200,00	200
202	199,15	200
204	198,31	200
206	197,49	200
208	196,68	200
210	195,89	200
212	195,10	200
214	194,33	200
216	193,57	200
218	192,82	200
220	192,09	200
222	191,36	200
224	190,65	200
226	189,95	200
228	189,25	200
230	188,57	200
232	187,89	200
234	187,23	200
236	186,58	200
238	185,93	200
240	185,29	200
242	184,67	200

Fuente: Elaboración propia.

En el ejercicio realizado se ha prescindido de un elemento importante: los precios de los factores, que determinan la restricción presupuestaria *R = f(P,F)*, donde, dados los precios *P*, la demanda de factores *F* estará determinada por el presupuesto disponible.

Suponiendo que los precios son $P_K = 10$ (la unidad del servicio del factor capital tiene un precio de 10 dólares) y $P_L = 5$ (el precio por unidad del servicio del factor trabajo), la restricción presupuestaria vendrá dada por la siguiente ecuación:

$$R = P_K \,.\, K + P_L \,.\, L = 10 \,.\, K + 5 \,.\, L$$

La función de producción *Q = f (K, L)* (denominada directa) permite determinar, según la tecnología disponible, distintas combinaciones de los factores K y L para producir diferentes cantidades de unidades del producto Q, pero no permite establecer un vínculo con los precios de los factores. Por lo tanto, no responde a la siguiente pregunta: ¿cuántas unidades de K y L se deben utilizar para obtener la máxima producción Q, dados los precios vigentes, P_K y P_L, y la restricción presupuestaria R? Ese nivel máximo de producción debe ser eficiente, es decir, compatible con un nivel mínimo de costos (demanda mínima de factores según los precios dados).

De modo similar a lo que sucedía en la teoría del consumidor, de este análisis se desprenden dos problemas: uno relacionado con la maximización de la producción y, el otro, con la minimización de costos. El análisis de la maximización se conoce también con el nombre de análisis primal, y el de la minimización se denomina análisis dual.

El análisis primal consiste en seleccionar las cantidades óptimas para la demanda de factores K y L, de modo que se obtenga un nivel de producción Q máximo, dado el vector de precios existente, P_K y P_L, y una determinada restricción presupuestaria R. De forma analítica, puede plantearse de la siguiente manera:

$$\max Q\ (K, L), \text{ sujeto a } R = K.\ P_{KO} + L.\ P_{LO}$$

El análisis dual consiste en seleccionar las cantidades óptimas para la demanda de factores K y L, de modo que se minimicen los costos, teniendo en cuenta el vector de precios existente y el nivel de producción específico que se desea alcanzar. Puede formularse así:

$$\min R = K.\ P_{KO} + L.\ P_{LO}, \text{ sujeto a } Q\ (K, L)$$

Donde:

$Q\ (K, L)$: función de producción Q

$R = K.\ P_{K0} + L.P_{L0}$:recta presupuestaria, que resulta de multiplicar las cantidades de los factores de producción, K y L, por los precios vigentes en el período P_{K0} y P_{L0}

La solución al problema de la maximización de $Q(K,L)$ requiere obtener las cantidades demandadas denominadas "marshallianas" u "ordinarias" (K_m y L_m). La solución al problema de la minimización implica calcular las cantidades "hicksianas" o "compensadas" (K_h y L_h) y, en ambos casos, la solución matemática se obtiene mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

En el caso de las cantidades marshallianas demandadas (K_m y L_m), estas se obtienen en función de los precios (P_K y P_L) y de la restricción presupuestaria R, $K_m=f(P_K,R)$ y $L_m=f(P_L,R)$ Las cantidades hicksianas demandadas (K_h y L_h) están en función de los precios (P_K y P_L) y del nivel de producción Q, $K_h=f(P_K,Q)$ y $L_h=f(P_L,Q)$.

De forma similar a lo que sucede en la teoría del consumidor, en la teoría de la producción las cantidades seleccionadas por las dos vías coinciden, $K_m = K_h$ y = $L_m = L_h$. Es decir, la resolución del problema de la optimización de la producción llega a resultados idénticos, tanto si se realiza un proceso de maximización de la producción como un proceso de minimización de costos.

Como ya se indicó, la forma matemática de la función de producción puede ser variada y desconocida. Las formas más comunes que se utilizan en la teoría económica son la función de Leontief, la función Cobb-Douglas, la función de elasticidad de sustitución constante, la función cuadrática y la función translogarítmica.

La cantidad seleccionada dependerá entonces de la función de producción que se defina, y, obviamente, del vector de precios vigente y de la restricción presupuestaria.

La función de producción de elasticidad de sustitución constante seleccionada era:

$$Q = 1 * (0{,}3\ K^{-0{,}17647} + 0{,}7\ L^{-0{,}17647})^{-(1\,/\,0{,}17647)}$$

El ejercicio consiste en obtener las cantidades (K_m y K_h; L_m y L_h) que permitan alcanzar el máximo de producción Q, dado el vector de precios vigente en el período *0* ($P_{K0} = 10$ y $P_{L0} = 5$) y un presupuesto disponible de 1.178,4 dólares para pagar el costo de los factores.

La expresión matemática sería la siguiente:

$$\max Q_0 = 1.\ (0{,}3\ .\ \mathrm{K}^{-0{,}17647} + 0{,}7\ .\ \mathrm{L}^{-0{,}17647})^{-(\frac{1}{0{,}17647})} = 100, \text{ sujeto a } R{=}10.K{+}5.L$$

Y, en términos de minimización de costos:

$$\min R{=}10.K{+}5.L, \text{ sujeto a } Q_0 = 1 * (0{,}3\ .\mathrm{K}^{-0{,}17647} + 0{,}7\ .\mathrm{L}^{-0{,}17647})^{-(\frac{1}{0{,}17647})}$$

Si se aplican los multiplicadores de Lagrange[5], se obtienen las cantidades óptimas demandadas: K_m[6] $= K_h$ y $L_m = L_h$ (K=41,32; *L*=153,04).

Si se multiplican los precios vigentes por las cantidades obtenidas[7], en el período *0* se obtiene el valor de la restricción presupuestaria de 1.178,4 dólares, que permite acceder a un nivel de producción de 100 ($Q_0 = 100$).

---

5 En el anexo A4 se realiza el proceso de optimización completo.

6 La fórmula que se obtiene de los multiplicadores de Lagrange para calcular las cantidades marshallianas demandadas es $Km = (\alpha\ .\ P_L)^{\sigma}\ .\ R\ /\ (\alpha^{\sigma}\ .\ P_K\ .\ P_L^{\ \sigma} + \beta^{\sigma}\ .\ P_L\ .\ P_K^{\ \sigma})$ y $Lm = (\beta\ .\ P_K)^{\sigma}\ .\ R\ /\ (\beta^{\sigma}\ .\ P_L\ .\ P_K^{\ \sigma} + \alpha^{\sigma}\ .\ P_K * P_L^{\ \sigma})$.

7 10 x 41,32 + 5 x 153,04.

Por lo tanto, la respuesta a la pregunta inicial sobre el problema de la maximización es que, si los precios vigentes de los factores son $P_{K0} = 10$ y $P_{L0} = 5$, se dispone de un presupuesto de 1.178,4 dólares y se desea producir 100 unidades de Q, el punto óptimo de adquisición de factores (demanda marshalliana) determina que se deben demandar 41,32 unidades de K y 153,04 unidades de L para emplearlas en el proceso productivo (dada la función de elasticidad de sustitución constante descrita).

La respuesta a la pregunta sobre el problema de la minimización es la siguiente: si se desea producir 100 unidades de Q, los precios vigentes de los factores son $P_{K0} = 10$ y $P_{L0} = 5$, y se desea minimizar los costos, el punto óptimo de adquisición de factores (demanda hicksiana) determina que se deben adquirir 41,32 unidades de K y 153,04 unidades de L para emplearlas en el proceso productivo (dada la función de elasticidad de sustitución constante descrita). La canasta de demanda de factores, dados los precios vigentes en el período *0*, se define de la siguiente manera: $C_0 = (K=41{,}32\ ;\ L=153{,}04)$.

Tanto en la solución de la maximización de la producción como en la de la minimización de los costos se obtienen los mismos resultados (cantidad demandada de cada factor). En el primer caso se busca obtener la demanda de factores productivos que permita una producción máxima, dados los precios de los factores y un presupuesto R. En el segundo caso, el objetivo también es calcular la demanda de los factores, pero para minimizar el costo, dadas las cantidades Q que se desea producir y los precios de los factores.

Junto a la solución del problema de maximización de $Q(K,L)$ y a la obtención de las demandas marshallianas, se obtendrá también una ecuación que define la función de producción indirecta $G(R,P_K,P_L)$[8], donde la cantidad producida ya no depende de las cantidades de los factores productivos (como sucede en la función de producción directa), sino de los precios de los factores y del presupuesto disponible para remunerar su utilización en el proceso productivo. Esta función maximiza la cantidad producida desde una perspectiva económica, teniendo en cuenta los costos. El productor demandará aquellas cantidades de factores que permitan maximizar la producción de Q, en función del presupuesto disponible y de los precios vigentes.

Como se ha explicado en la teoría del consumidor, en la que se obtiene la función de utilidad indirecta, en la teoría del productor resulta útil obtener la función de la producción indirecta, ya que permite determinar los niveles de producción a partir del presupuesto y los precios de los factores. El análisis de las cantidades consumidas que se obtienen a partir de las funciones de utilidad y de producción directas es tecnológico, ya que establece relaciones entre el consumo y la utilidad (en la teoría del consumo) o entre el insumo y el producto (en la teoría de la producción). Por otra parte, el análisis de las cantidades consumidas obtenidas a partir de las funciones de utilidad y de producción indirectas es económico, ya que determina los vínculos entre el consumo y la utilidad, y entre el insumo y el producto, pero teniendo en cuenta los precios relativos de los insumos y el presupuesto disponible.

8 Véase la sección 3 del anexo A4.

Las cantidades obtenidas (K = 41,32; L = 153,04) permiten alcanzar un nivel (máximo) de producción de 100 unidades de Q a un costo (mínimo) de 1.178,4 dólares. El cuadro II.2 también incluye combinaciones de K y L diferentes, que permiten alcanzar la producción de 100 unidades de Q, pero esas demandas de factores, como se calcularon a partir de la función de producción directa, no están sujetas a las restricciones en materia de precios y de presupuesto, y no son óptimas en relación con los costos. Son combinaciones óptimas desde el punto de vista tecnológico, pero no desde el punto de vista económico.

Si se supone ahora un aumento de P_K de 10 a 11 dólares, habría que volver a realizar el cálculo de la maximización de la producción y la minimización de costos, obteniendo como resultado las nuevas demandas de los factores productivos. En este caso, el resultado es $K_m = K_h$ = 37,91 y $L_m = L_h$ = 152,27, de modo que la canasta de la demanda de factores en el período *1* se expresa como C_1 *=(K=37,91 ; L=152,27)*. Dado que el presupuesto es el mismo (1.178 dólares), la cantidad producida se reduciría a 96,70 unidades de Q.

Ante la nueva situación de precios vigentes en el período *1*, para seguir produciendo las 100 unidades de Q que se producían en el período *0* es necesario calcular el costo mínimo. Nuevamente, se presenta el problema de la minimización de costos, es decir, hay que calcular las cantidades óptimas para la demanda de factores K y L, de modo que se minimicen los costos ante el vector de precios vigente en el período *1*, y dado el nivel concreto de producción que se desea alcanzar (100 unidades de Q).

El resultado es $K_m = K_h$ = 39,21 y $L_m = L_h$ = 157,47, de modo que la canasta de la demanda de factores estimada en el período *1*, que permitiría seguir produciendo 100 unidades de Q, se expresa como C^*_1 *=(K=39,21; L=157,47)*, y el costo mínimo C^*_1 sería de 1.218,6 dólares[9].

El cociente de gastos mínimos C*1 / C0 = 1.218,6 / 1.178,4 = 1,03414 equivale a un aumento del 3,4%. Como se señaló en el análisis de la teoría del consumidor, este aumento se corresponde con el "índice de precios verdadero". En el caso de las funciones de elasticidad de sustitución constante, el IP que se corresponde de forma exacta con el índice que se desprende del cociente de gastos mínimos es el de Lloyd Moulton, ya definido en el capítulo anterior:

$$IPLM_t = \left[\sum_{i=1}^{N} w_0^i \cdot \left(\frac{P_t^i}{P_0^i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

Donde σ es la elasticidad parcial de sustitución de Allen σ_{KL}, que se obtiene a partir del parámetro ρ mediante la relación $\rho = (\sigma-1) / \sigma$.

Entre los datos de los parámetros de la función de producción de elasticidad de sustitución constante dados al inicio del ejercicio, figuraba el siguiente: σ_{KL}= 0,85 (ρ = 0,17647).

De acuerdo con los vectores de precios vigentes en los períodos *0* y *1*, y procediendo al cálculo del índice de precios de Lloyd Moulton, se obtiene el valor de 1,03414, que es coincidente de forma exacta con el IP "verdadero" que se desprende de la función de producción de elasticidad de sustitución constante. En el anexo A4 se realiza el análisis completo de la función de producción de elasticidad de sustitución constante.

9 11 x 39,21 + 5 x 157,47.

Capítulo III
Comparación indirecta e índices en cadena

A. Comparación indirecta

Supóngase que una oficina de estadística dispone de datos sobre los precios y las cantidades (véanse los cuadros III.1 y III.2) para el período 2013-2017 y selecciona un índice de precios (IP) de Fisher para calcular el nivel general de precios (véase el cuadro III.3).

■ Cuadro III.1
Precios del ejercicio de comparación indirecta, 2013-2017

Períodos	Agricultura	Energía	Industria	Informática	Servicios	Comunicaciones
2013	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
2014	1,3	2,0	1,3	0,7	1,4	0,8
2015	1,0	1,0	1,5	0,5	1,7	0,6
2016	0,7	0,5	1,6	0,3	1,9	0,4
2017	1,0	1,0	1,7	0,2	2,0	0,2

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro III.2
Cantidades del ejercicio de comparación indirecta, 2013-2017

Períodos	Agricultura	Energía	Industria	Informática	Servicios	Comunicaciones
2013	30	10	40	10	45	5
2014	28	8	39	13	47	6
2015	30	11	38	30	50	8
2016	32	14	39	60	56	13
2017	29	12	40	100	65	25

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro III.3
Índice de precios de Fisher

Períodos	Índice de precios de Laspeyres	Índice de precios de Paasche	Índice de precios de Fisher	Variación porcentual del índice de precios de Fisher
2013	1,0000	1,0000	1,0000	-
2014	1,3214	1,2965	1,3089	30,9
2015	1,3179	1,2144	1,2651	-3,3
2016	1,2893	1,0346	1,1549	-8,7
2017	1,4357	0,9742	1,1826	2,4

Fuente: Elaboración propia.

En la última columna del cuadro III.3 figuran las tasas de variación interanual; por ejemplo, la variación del nivel general de precios de 2017 con respecto a 2016 es del 2,4%.

Ahora bien, ¿es esa la mejor tasa que se puede obtener? De acuerdo con el análisis realizado en el capítulo anterior sobre la base de comparaciones directas, la respuesta sería afirmativa, pues se trata de un índice de Fisher, esto es, un índice superlativo que tiene sustento en la teoría económica, y también en los enfoques estadístico y axiomático.

Sin embargo, esa afirmación es válida únicamente si se realizan comparaciones binarias directas, esto es, si se comparan los precios (y las cantidades) de forma directa entre dos períodos, de los cuales uno es el denominado período corriente (por ejemplo, 2017 en el cuadro III.3) y, el otro, el período base (2013 en el cuadro III.3)[1]. En cambio, si se desea comparar el período corriente con un período distinto del año base (por ejemplo, 2017 con respecto a 2016), la tasa de variación ya no es necesariamente la mejor, aun cuando se utilice un índice superlativo como el índice de precios de Fisher. Como ya se ha señalado, el IP de Fisher es un promedio geométrico de los IP de Laspeyres y de Paasche.

Si, en el ejemplo del cuadro III.3, se toma el índice de precios de Laspeyres y se calcula la tasa de variación de 2017 con respecto a 2016, su valor será del 11,4%. Para realizar la comparación se efectúa el siguiente cálculo:

$$\Delta IPL_{\frac{17}{16}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{N} P_{17} . Q_{13}}{\sum_{i=1}^{N} P_{13} . Q_{13}}}{\frac{\sum_{i=1}^{N} P_{16} . Q_{13}}{\sum_{i=1}^{N} P_{13} . Q_{13}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_{17} . Q_{13}}{\sum_{i=1}^{N} P_{16} . Q_{13}}$$

El resultado es, en efecto, una variación de precios entre 2017 y 2016 ponderada por las cantidades de 2013. Los precios del numerador (P_{17}) son distintos de los precios del denominador (P_{16}), mientras que las cantidades del numerador y el denominador son idénticas (Q_{13}).

[1] Históricamente, el concepto de período base significaba el período en el que se incorporaban nuevas ponderaciones en las cuentas nacionales (y en las estadísticas de precios), debido a los cambios estructurales que se suceden en la economía, que afectan tanto a la oferta como a la demanda, con la consecuente aparición y desaparición de productos o la modificación de su calidad.

Si se realiza la misma comparación, pero con el índice de precios de Paasche (cuya tasa de variación es del -5,8% entre 2017 y 2016), la fórmula sería la siguiente:

$$\Delta IPP_{\frac{17}{16}} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} P_{17}\cdot Q_{17}}{\sum_{i=1}^{N} P_{13}\cdot Q_{17}}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{N} P_{16}\cdot Q_{16}}{\sum_{i=1}^{N} P_{13}\cdot Q_{16}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_{17}\cdot Q_{17} \cdot \sum_{i=1}^{N} P_{13}\cdot Q_{16}}{\sum_{i=1}^{N} P_{13}\cdot Q_{17} \cdot \sum_{i=1}^{N} P_{16}\cdot Q_{16}}$$

Este resultado no es una variación de precios, sino una variación de valor, pues la diferencia entre el numerador y el denominador no incluye únicamente precios, también incluye cantidades. Es por ello que no es válido realizar una comparación entre dos períodos cualesquiera cuando se utiliza la fórmula de Paasche. Dado que el índice de precios de Fisher es el promedio geométrico de los IP de Laspeyres y de Paasche, también arrastra este problema.

En el ejemplo propuesto, las comparaciones válidas, es decir, las que arrojan el mejor resultado, serían las que se realicen entre cada año y el período base 2013, pero no entre cada año y otro año diferente de 2013. Esta conclusión es una muy mala noticia para cualquier oficina de estadística, ya que justamente se estaría dando una señal negativa sobre la coyuntura, que es el dato más demandado por los usuarios. La solución a este problema ha dado origen a los denominados índices encadenados.

B. Índices en cadena

El planteamiento del problema se puede observar en el cuadro III.4[2].

■ Cuadro III.4

Cambio de año base en cada nuevo año

Año final	Año inicial				
	2013	2014	2015	2016	2017
2013	$I_{13,13}$				
2014	$I_{13,14}$	$I_{14,14}$			
2015	$I_{13,15}$	$I_{14,15}$	$I_{15,15}$		
2016	$I_{13,16}$	$I_{14,16}$	$I_{15,16}$	$I_{16,16}$	
2017	$I_{13,17}$	$I_{14,17}$	$I_{15,17}$	$I_{16,17}$	$I_{17,17}$

Fuente: Elaboración propia.

Cada índice *I* representa un valor calculado con una fórmula que puede corresponderse con la de cualquier número índice, pero, como ya se señaló, se debe elegir la fórmula de un índice superlativo, como el índice de precios de Fisher. Así, el $I_{16,17}$ es el promedio geométrico de los IP de Laspeyres y de Paasche, utilizando los ponderadores de 2016 y 2017. Del mismo modo, en $I_{13,17}$ se utilizan los ponderadores de 2013 y 2017.

2 Este cuadro sigue la lógica del ejemplo de Triplett (1992).

Utilizando los datos de los cuadros III.1 y III.2 y la fórmula del IP de Fisher, el planteamiento del cuadro III.4 se puede traducir a números índices, obteniendo los resultados que figuran en el cuadro III.5.

Cuadro III.5

Índices de precios de Fisher con base en 2013, 2014, 2015, 2016 y 2017

Año	2013	2014	2015	2016	2017
2013	1,0000				
2014	1,3089	1,0000			
2015	1,2651	0,9925	1,0000		
2016	1,1549	0,9359	0,9455	1,0000	
2017	1,1826	0,9903	1,0019	1,0594	1,0000

Fuente: Elaboración propia.

También se pueden calcular las correspondientes tasas de variación, que se presentan en el cuadro III.6.

Cuadro III.6

Tasas anuales de variación del índice de precios de Fisher

(En porcentajes)

Año	2013	2014	2015	2016
2013	-			
2014	30,9			
2015	-3,3	-0,8		
2016	-8,7	-5,7	-5,4	
2017	2,4	5,8	6,0	5,9

Fuente: Elaboración propia.

Si un usuario desea conocer la variación de precios entre 2017 y 2016, se encontrará con cuatro resultados diferentes, a saber: 2,4% de acuerdo con la base 2013; 5,8% según la base 2014; 6,0% según la base 2015, y 5,9% según la base 2016.

Sin embargo, como ya se indicó, la tasa de variación del IP de Fisher del 2,4%, según la base 2013, incluye el uso del IP de Paasche en la fórmula de Fisher. Este no es un índice de precios puro, ya que, como mide la variación entre dos períodos (2016 y 2017) distintos del año base 2013, contiene un componente de cantidades. Por ese motivo, la tasa de variación correcta (entre 2016 y 2017) es la que corresponde a la base 2016 (el 5,9%). Consecuentemente, las mejores tasas de variación para cada par de años son las que figuran en la diagonal principal del cuadro III.6: el 30,9% (2014 respecto de 2013), el -0,8% (2015 respecto de 2014), el -5,4% (2016 respecto de 2015) y el 5,9% (2017 respecto de 2016).

Por otra parte, si un usuario desea conocer la tasa de variación de los precios entre 2015 y 2014, la mejor respuesta sería la que arroja la base 2014 en el cuadro III.5 (0,9925/1,000 = -0,8%), y no la que utiliza la base 2013 (1,2651/1,3089 = -3,3%). De este modo, la oficina de estadística tendría que dar una respuesta específica a cada solicitud de los usuarios, lo que no parece el mejor camino.

Cuando se trate de una serie larga, se recomienda la compilación de índices encadenados, en la que el índice se va construyendo sobre la base de calcular las variaciones de cada par de años y acumular (multiplicar) después dichas variaciones a lo largo del tiempo. En el ejemplo propuesto, sería:

$$IE_{13,17} = I_{13,14} . I_{14,15} . I_{15,16} . I_{16,17}$$

Donde:

$IE_{13,17}$: índice encadenado de 2017 con período de referencia[3] en 2013 = 1

$I_{13,14}$: índice de 2014 con período de referencia de precios en 2013

$I_{14,15}$: índice de 2015 con período de referencia de precios en 2014

$I_{15,16}$: índice de 2016 con período de referencia de precios en 2015

y $I_{16,17}$: índice de 2017 con período de referencia de precios en 2016

Como se puede observar, esta serie toma en cada caso las mejores variaciones interanuales para ir construyendo la serie larga. Ello significa “cambiar de base” todos los años[4], lo que permite mantener actualizadas las ponderaciones de la canasta; aunque se utilice la fórmula de Laspeyres, si se realiza una actualización anual, la antigüedad de la canasta será de solo un año. La serie, siguiendo con el ejemplo, sería la que se presenta en el cuadro III.7.

[3] En el contexto de los IP en cadena, el concepto de período de referencia se utiliza con diferentes sentidos, según se trate del “período de referencia del índice”, el “período de referencia de los precios” o el “período de referencia de las ponderaciones”. Período de referencia del índice significa el período cuyo valor se ubica en 1 (o en 100). Período de referencia de los precios es el período con el que se comparan los precios de los demás períodos (en este caso, el año inmediatamente anterior) y, por tanto, es el período que se ubica en el denominador del cálculo del índice. Período de las ponderaciones es el período cuyos precios y cantidades se utilizan para pesar cada producto en la canasta total, y suele abarcar un año (si la fórmula utilizada es la de Laspeyres, dicho año es el anterior; si es la fórmula de Paasche, es el año corriente; y, si es la fórmula es Fisher, se utilizan ponderaciones de ambos períodos) (OIT y otros, 2006, pág. 195).

[4] En el contexto de los índices en cadena, el concepto de “período base” cambia de significado. En el análisis del “período de base fija”, significa el “período de las ponderaciones”. En el contexto de los índices de volumen en cadena, es el período que aparece en el denominador de la fórmula de cálculo del índice (es similar al concepto de “período de referencia de los precios” utilizado en los IP en cadena).

■ Cuadro III.7

Índice de precios de Fisher encadenado con período de referencia 2013=1

Año	Índice de precios de Fisher encadenado	Tasas *(en porcentajes)*
2013	1,0000	-
2014	1,3089	30,9
2015	1,2990	-0,8
2016	1,2283	-5,4
2017	1,3013	5,9

Fuente: Elaboración propia.

La ventaja de utilizar los índices en cadena es que proporcionan la mejor tasa de variación para los períodos "vecinos" (en este caso, la tasa interanual), ya que permiten realizar comparaciones válidas ("puras") de precios por pares de períodos (en este ejemplo, anuales). Si, además, se emplea alguna de las fórmulas de índices superlativos, se obtendrán un índice y una tasa de variación que tendrá sustento estadístico y económico.

No obstante, estos índices también tienen una desventaja. Si se desea realizar comparaciones entre dos años no consecutivos, el resultado no será el mejor y se puede presentar el denominado "problema de la desviación"[5]. En el anexo A5 se presenta un ejemplo de este tipo de situación. En otras palabras, el uso de los índices en cadena es recomendable si la prioridad es obtener una buena respuesta sobre la situación en la coyuntura, a costa de que, quizás, la respuesta sobre la situación a largo plazo no sea la mejor. Es por ello que, en el *Manual de Cuentas Nacionales 2008*, se afirma que, "en general, se recomienda que se encadenen los índices anuales" (Comisión Europea y otros, 2008, pág. 351).

El uso de los índices en cadena se ha extendido entre los países en los últimos años, tanto para calcular las variaciones de los precios al consumidor como las del volumen del producto bruto interno (PIB) de las cuentas nacionales. En general, los países que los han adoptado han empleado la fórmula de Laspeyres, tanto para los precios (en las estadísticas de precios) como para el volumen (en las cuentas nacionales). Existen dos motivos para no utilizar alguna de las fórmulas de índices superlativos. El primero es de orden práctico, porque, como ya se señaló, para aplicar las ponderaciones del período corriente es necesario contar con más información, que generalmente no está disponible. El segundo motivo consiste en que, "cuando los precios relativos no varían demasiado y la inflación es reducida, el índice en cadena de Laspeyres puede considerarse como una aproximación adecuada del índice de Fisher correspondiente" (Eurostat, 2000).

En el cuadro III.8 se presentan las fórmulas utilizadas para el cálculo de los índices de precios al consumidor (IPC) en determinados países.

5 Otra desventaja del uso de los índices en cadena es que no cumplen el criterio de aditividad, es decir, que no se puede obtener un agregado mediante la suma de las partes, lo que origina una discrepancia estadística. La falta de aditividad se observa, por ejemplo, en las medidas de volumen, cuando la serie del número índice se transforma en una serie de valores a precios de un determinado año de referencia. Como el agregado de la serie en cadena se basa en tasas de variación con ponderaciones actualizadas año a año, si se reconstruye el agregado de la serie mediante la suma de los componentes elementales, el resultado tendrá un valor diferente al de la serie en cadena.

■ Cuadro III.8

Países seleccionados: fórmulas utilizadas para el cálculo de los índices de precios al consumidor

País	Fórmula	Actualización de la canasta
Alemania	Índice de Laspeyres fijo	Quinquenal
Australia	Índice de Laspeyres fijo	Quinquenal
Canadá	Índice de Laspeyres fijo	Cuatrienal
Estados Unidos	Índice de Laspeyres encadenado (para el *Consumer Price Index for All Urban Consumer (CPI-U)* (Índice de Precios al Consumidor para Todos los Consumidores Urbanos) y el *Consumer Price Index for Urban Wage Earners and Clerical Workers (CPI-W)* (Índice de Precios al Consumidor para los Asalariados y Empleados Administrativos Urbanos))	Bienal en la fórmula del índice de Laspeyres encadenado[a]
	Índice de Tornqvist (para el *Chained Consumer Price Index for All Urban Consumer (C-CPI-U)* (Índice en Cadena de Precios al Consumidor para Todos los Consumidores Urbanos))	Mensual en la fórmula del índice de Tornqvist encadenado[b]
España	Índice de Laspeyres encadenado	Anual
Países Bajos	Índice de Laspeyres encadenado	Anual
Reino Unido	Índice de Laspeyres encadenado	Anual
Italia	Índice de Laspeyres encadenado	Anual
Japón	Índice de Laspeyres fijo	Quinquenal
	Índice de Laspeyres encadenado	Anual

Fuente: Elaboración propia.

[a] Estos dos índices son encadenados bienales, ya que los ponderadores se actualizan cada dos años. En el lapso de esos dos años los ponderadores permanecen fijos. Por ejemplo, para calcular el período 2014-2015 se utilizan los ponderadores del período 2011-2012, que se obtienen de las Encuestas sobre el Gasto de los Consumidores (*Consumer Expenditure Surveys*).

[b] Es un índice mensual encadenado, ya que las ponderaciones de precios se actualizan cada mes.

En el cuadro III.9 se presentan las fórmulas que se utilizan para las mediciones del volumen del PIB en las cuentas nacionales.

■ Cuadro III.9

Países seleccionados: fórmulas **utilizadas para las mediciones de los índices de volumen del producto interno bruto (PIB)**

País	Fórmula
Alemania	Índice de Laspeyres encadenado
Australia	Índice de Laspeyres encadenado
Canadá	Índice de Fisher encadenado
Estados Unidos	Índice de Fisher encadenado
España	Índice de Laspeyres encadenado
Países Bajos	Índice de Laspeyres encadenado
Reino Unido	Índice de Laspeyres encadenado
Italia	Índice de Laspeyres encadenado
Japón	Índice de Laspeyres encadenado

Fuente: Elaboración propia.

En América Latina y el Caribe, los países aún no han adoptado los índices en cadena para la medición de los IPC. El Instituto Nacional de Estadística y Geografía de México está estudiando la posibilidad de introducir un índice en cadena[6].

Por otra parte, en las mediciones de las cuentas nacionales, siete países de América Latina han incorporado la fórmula de Laspeyres encadenada para la divulgación del volumen del PIB: Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Guatemala, Nicaragua y República Dominicana.

Como se señala en el *Sistema de Cuentas Nacionales* 2008, (15.44):

"En conclusión, las situaciones favorables al uso de índices en cadena de Laspeyres y de Paasche a lo largo del tiempo parecen más probables que aquéllas que son desfavorables. Las fuerzas económicas subyacentes que son responsables de las variaciones a largo plazo observadas en los precios y cantidades relativos, como el progreso tecnológico y el aumento del ingreso, no suelen revertirse. Por lo tanto, en general se recomienda que se encadenen los índices anuales. Los componentes de precio y volumen de los datos mensuales y trimestrales usualmente son objeto de mucha más variación que sus contrapartes anuales debido a factores estacionales y a irregularidades de corto plazo. Por lo tanto, las ventajas de encadenar en estas frecuencias más altas son menores y el encadenamiento definitivamente no debe aplicarse a datos estacionales que no hayan sido ajustados para eliminar fluctuaciones estacionales."

Sin embargo, cabe reiterar que la utilización de los índices en cadena se adecúa mejor al análisis coyuntural y a corto plazo, renunciando, en consecuencia, a una visión más estructural y de largo plazo con respecto a algunos aspectos económicos fundamentales, como la evolución del producto y la inflación (véase el recuadro III.1).

■ Recuadro III.1

Cambio de base: base fija o base encadenada

Históricamente, las oficinas de cuentas nacionales de los países cambiaban el año base cada cierta cantidad de años, idealmente cada cinco. Se consideraba que el "nuevo año base" debía reunir ciertas características, como la disponibilidad de información completa (censos de población, censos económicos o, al menos, encuestas económicas representativas y encuestas sobre los gastos e ingresos de los hogares), una situación de normalidad económica (baja tasa de inflación, crecimiento en los niveles del PIB y tasa de desempleo normal) y una situación de normalidad política (ausencia de conflictos bélicos). Al incorporar las medidas encadenadas de volumen, que requieren actualizar el "año base" todos los años, los criterios de "información completa" y "normalidad" pierden vigencia, ya que se deben actualizar las ponderaciones todos los años, en ocasiones con información completa y, en otras, incompleta, y la situación puede ser de "normalidad" económica y política o no. Cambiar la base de las cuentas nacionales significa modificar las ponderaciones. En las series encadenadas se cambia el año base todos los años, ya que la base es móvil y se actualiza anualmente. Como ya se ha señalado, es muy difícil que la disponibilidad de toda la información estadística básica necesaria coincida en un mismo período; en general, el año del censo de población no coincide con el año de la

[6] Véase [en línea] http://www.inegi.org.mx/est/contenidos/Proyectos/INP/PreguntasINPC.aspx.

Recuadro III.1 (conclusión)

encuesta de gastos e ingresos de los hogares, ni con el año de los datos de un censo o encuesta económica. Las estadísticas básicas están en movimiento permanente, a lo que hay que sumar los cambios que provienen de los clasificadores y las normas internacionales. Cada oficina de cuentas nacionales debe decidir en qué momento se introducen esas modificaciones. En la actualidad, desde el concepto de series encadenadas, el antiguo cambio del año base tiene otro significado, y se denomina cambio del año de referencia. En cada cambio del año de referencia se pueden introducir modificaciones de mayor importancia, como los cambios de nivel en el PIB o de los métodos de medición. Al mismo tiempo, cada año se debe cambiar la base, esto es, las ponderaciones con las que se miden las variaciones del volumen en el período anual siguiente. En otras palabras, en 2016 se mide el volumen partiendo de las ponderaciones de 2015, en 2017 se toman en cuenta las ponderaciones de 2016 y así sucesivamente.

Fuente: Elaboración propia.

En el anexo A6 se presentan tres ejercicios prácticos de medidas encadenadas de volumen con una frecuencia anual.

Capítulo IV
Paridad del poder adquisitivo

Con frecuencia, es necesario comparar valores y volúmenes de productos diferentes en distintos países. Por ejemplo, al viajar al exterior, es habitual preguntarse cuánto cuesta tomar un café, viajar en autobús o comprar un libro en el lugar de destino. Para realizar ese cálculo, se suele utilizar el tipo de cambio nominal o de mercado. El tipo de cambio entre dos países es el precio al que se realizan los intercambios entre ellos, en otras palabras, el precio relativo de las monedas de dos países.

Ahora bien, si en lugar de viajar al exterior, viajamos dentro de nuestro propio país, en ocasiones observamos que el mismo café, con una calidad similar y en un restaurante parecido, tiene precios distintos. Como dentro de un país la moneda que se utiliza es la misma, esa diferencia podría deberse a niveles de precios diferentes entre un lugar y otro, y no a diferencias en el tipo de cambio de mercado. Teniendo en cuenta esta situación, al calcular el precio del café en otro país mediante el tipo de cambio de mercado, puede haber diferencias debido a que existan diferentes niveles de precios en el seno de ese país. Por ese motivo, también se debe tener en cuenta el tipo de cambio real. El tipo de cambio real es el precio relativo de los bienes en dos países. Este tipo de cambio expresa la relación conforme a la cual podemos intercambiar bienes de un país por los de otro país. El tipo de cambio real al que intercambiamos bienes nacionales y extranjeros depende de los niveles de precios de cada país y del tipo de cambio nominal al que se comercializan las monedas.

Este capítulo tiene por objetivo presentar el concepto de paridad del poder adquisitivo (PPA), estrechamente vinculado al concepto de tipo de cambio real. La utilidad principal de las PPA es permitir las comparaciones de volumen entre distintos países. Estas se pueden aplicar tanto a nivel de producto como a nivel de agregados económicos. Constituyen un instrumento fundamental que interviene en los cálculos para realizar comparaciones sobre el tamaño de las economías y poder tener una noción acerca del bienestar de sus habitantes.

En las siguientes secciones se presentan los conceptos y las definiciones relacionados con la estimación de las PPA, la información que se utiliza para efectuar los cálculos, las fórmulas empleadas, sus principales usos y las diferencias con la comparación de volumen en el tiempo, esto es, el cálculo a precios constantes que se realiza en el marco de las cuentas nacionales.

Es importante destacar que el organismo que efectúa la estimación de las PPA es el Banco Mundial, en el marco del Programa de Comparación Internacional (PCI), en el que participan múltiples organismos internacionales y países interesados. En la ronda de 2011 del PCI participaron 199 países. Las últimas secciones del capítulo se dedican a detallar la metodología que se emplea en el PCI y los resultados obtenidos.

A. Ley de un solo precio

El marco teórico que fundamenta las PPA es la ley de un solo precio. La idea central de esta ley es que, en un mercado integrado, todo producto tiene un único precio. Si se supone que, con respecto a un conjunto de productos, los mercados locales y extranjeros están estrechamente vinculados, esto es, que los productos se pueden intercambiar fácilmente entre ambos países, la ley de un solo precio establece que los precios de dichos productos deben ser los mismos en ambos países. El problema que enfrentan los países es que en cada uno de ellos se valúan los productos mediante la moneda local. La ley de un solo precio requiere que los precios sean iguales cuando se expresen en una única moneda. Por lo tanto, se debe recurrir a un tipo de cambio para poder expresar los precios en una misma moneda.

Supongamos que el precio de un producto en moneda extranjera en el mercado extranjero es P^*. Para expresar ese precio en moneda local, se debe multiplicar el precio por el tipo de cambio E. La ley de un solo precio sostiene que el precio expresado en moneda local es igual al precio expresado en moneda extranjera multiplicado por el tipo de cambio: $P = EP^*$.

El proceso que asegura el cumplimiento de la ley de un solo precio es el arbitraje. Si el precio que existe en un país es inferior al del extranjero, la competencia entre los importadores haría que todos tratasen de comprar barato en el país local para revender a un precio superior en el extranjero. Ello provocaría el alza del precio en el mercado local y su equiparación con el del exterior.

La doctrina de la paridad del poder de compra trata de extender la ley de un solo precio para productos individuales a una canasta de productos que determina el nivel promedio de precios de una economía. La ley de un solo precio debe aplicarse a cada producto que se comercializa internacionalmente; por lo tanto, se aplica en general al nivel de precios local P, que es un promedio ponderado de los precios de los productos individuales. Este debe ser igual al índice de precios extranjeros P* multiplicado por el tipo de cambio E. La expresión P = EP* es la forma más simple de expresar la paridad del poder de compra. Esta relación solo es válida con los siguientes supuestos: i) no hay barreras naturales de intercambios, como costos de transporte y seguros; ii) no hay barreras artificiales, como aranceles y cuotas; iii) todos los productos se comercializan internacionalmente, y iv) los índices de precios locales y extranjeros contienen los mismos productos y se han calculado con las mismas ponderaciones.

En la práctica, es muy difícil que se cumplan estas condiciones. Existe una definición menos restrictiva, que permite una ligera desviación del índice local de precios respecto del índice externo multiplicado por el tipo de cambio, debido a las barreras naturales o artificiales. Según dicha definición, si las barreras son estables a lo largo del tiempo, los cambios porcentuales en P deben ser aproximadamente iguales a los cambios porcentuales en EP*. El cambio porcentual de EP* se puede aproximar mediante la suma de cambios porcentuales en E y P*. De acuerdo con la PPP, la tasa de inflación interna sería igual a la tasa de depreciación más la tasa de inflación externa. De todas formas, también es difícil que la definición menos restrictiva se cumpla, a causa de la presencia de bienes que no se comercializan a nivel internacional.

El tipo de cambio real se define como e = EP*/P. Cuando *e* aumenta, los bienes externos se encarecen en comparación con los bienes nacionales, produciéndose una depreciación del tipo de cambio real. A la inversa, cuando *e* disminuye, se produce una apreciación del tipo de cambio real y los bienes locales se encarecen respecto de los bienes internacionales. La hipótesis que subyace en las PPP es que *e* (tipo de cambio real) es constante, o casi constante, a lo largo del tiempo. Es importante destacar que el tipo de cambio real no solo tiene en cuenta el tipo de cambio nominal, sino también las diferencias en los niveles de precios de los países.

B. ¿Qué es la paridad del poder adquisitivo?

La PPA es un precio relativo. Para un determinado producto, la PPA es simplemente la relación entre los precios expresados en moneda local en cada país con respecto al país elegido como base. Por ejemplo, si 1 kg de manzanas rojas de una determinada calidad cuesta 2 dólares en el país A y 800 pesos en el país B, la PPA, suponiendo que el país A es el país base, se puede calcular como 800 dividido por 2. Es decir, la PPA es 400 pesos por dólar. Por cada dólar que se gasta en el país A en comprar 1 kg de manzanas rojas de una determinada calidad, se deberán gastar 400 pesos para obtener exactamente el mismo producto en el país B. Es fundamental destacar que, para realizar este cálculo, debemos obtener los precios para exactamente el mismo producto, tanto en calidad como en cantidad, en cada uno de los países que se estudien en la comparación.

De la misma manera como se calcula el precio relativo de un determinado producto, se puede calcular el de un grupo de productos, e incluso el del total del producto interno bruto (PIB) de la economía. Para ello, es necesario disponer de información proveniente del cálculo del PIB en valores nominales y emplear fórmulas matemáticas que nos permitan sintetizar la información sobre los precios y las cantidades en un indicador.

La PPA se puede definir técnicamente como la cantidad de unidades monetarias necesarias para comprar las cantidades de bienes y servicios equivalentes a lo que se puede comprar con una unidad de la moneda del país base.

El objetivo principal del cálculo de la PPA es permitir la realización de comparaciones de volumen entre los países. Cuando se realizan comparaciones internacionales del PIB utilizando el tipo de cambio de mercado para convertir los valores, no se están teniendo en cuenta los diferentes niveles de precios prevalecientes en los distintos países. Es por ello que debemos utilizar las PPA, ya que no solo permiten la conversión de las monedas, sino que también proveen un valor a un nivel de precios uniforme. En otras palabras, las PPA toman en cuenta las diferencias en los niveles de precios de los países incluidos en la comparación. Un indicador que se apoya en el concepto de PPA, pero aplicado solo a un producto, es el índice Big Mac (véase el recuadro IV.1).

■ Recuadro IV.1
El índice Big Mac

El índice Big Mac fue creado por la revista *The Economist* en 1986, como una aproximación para saber si el valor de las monedas está en su nivel “correcto”. Se basa en la teoría de las paridades del poder adquisitivo, así como en la idea de que, a largo plazo, los tipos de cambio de mercado deben acercarse a un tipo de cambio que iguale los precios de las canastas de bienes y servicios idénticas (en este caso, una hamburguesa) en cualquier par de países.

Por ejemplo, el precio promedio de la hamburguesa Big Mac en los Estados Unidos, en julio de 2014, era de 4,80 dólares y, en el Brasil, era de 5,86 dólares, utilizando para el cálculo los tipos de cambio de mercado (13 reales/2,22 tipo de cambio). El resultado obtenido para el índice Big Mac es de 2,71, que se obtiene sobre la base de dividir 13 reales por 4,80 dólares. Si se compara el tipo de cambio con el índice calculado (2,71/2,22), el real brasileño estaba sobrevalorado en ese momento en un 22%, según este indicador.

Este índice no se ideó como una estimación precisa de la desalineación de las monedas, sino simplemente como un instrumento para facilitar la comprensión de la teoría del tipo de cambio. Aun así, el índice Big Mac se convirtió en un estándar global, fue incluido en varios libros de texto y ha sido objeto de estudio en, al menos, 20 investigaciones académicas.

En el cuadro se presentan los precios de la hamburguesa Big Mac en algunos países de América Latina en julio de 2014, así como el precio en los Estados Unidos, tanto en moneda local como en su conversión a dólares mediante el tipo de cambio de mercado vigente en el momento de la comparación. Como se menciona en el ejemplo, el índice se obtiene sobre la base de comparar el precio de la hamburguesa Big Mac en cada país, en la moneda local, con el precio vigente del mismo producto en los Estados Unidos.

Recuadro IV.1 (conclusión)

■ América Latina (países seleccionados) y Estados Unidos:
precios de la hamburguesa Big Mac, julio de 2014

País	Precio en moneda local	Tipo de cambio de mercado	Precio en dólares	Tipo de cambio según paridad del poder adquisitivo	Valuación del dólar *(en porcentajes)*
Argentina	21,00	8,17	2,57	4,38	-46
Brasil	13,00	2,22	5,86	2,71	22
Chile	2 100,00	564,14	3,72	437,96	-22
Colombia	8 600,00	1 847,65	4,65	1 793,53	-3
Costa Rica	2 150,00	537,30	4,00	448,38	-17
México	42,00	12,93	3,25	8,76	-32
Perú	10,00	2,79	3,59	2,09	-25
Uruguay	113,00	22,97	4,92	23,57	3
Venezuela (República Bolivariana de)	75,00	11,00	6,82	15,64	42
Estados Unidos	4,80	1,00	4,80	1,00	0

Fuente: Elaboración propia.

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de *The Economist*, varios números.

C. ¿Qué usos tiene la paridad del poder adquisitivo?

Los Gobiernos, los investigadores, los periodistas especializados, el sector privado y los organismos internacionales utilizan las PPA para poder realizar distintos tipos de análisis. Para los Gobiernos, resulta fundamental conocer el tamaño relativo de la economía en comparación con el resto del mundo, el desempeño de la economía y el nivel de bienestar de sus habitantes. Con ese fin, se calculan una serie de indicadores, como el PIB real y el PIB real per cápita, entre otros. El hecho de contar con estadísticas de calidad e indicadores apropiados permite definir las políticas públicas que se deberían aplicar en el país. Los periodistas especializados utilizan la información que se obtiene mediante las PPA para formular observaciones y críticas sobre las políticas adoptadas y difundir dicha información a la sociedad. En el sector privado, es imprescindible realizar análisis de competitividad y evaluar la estrategia de precios a la hora de colocar productos en el mercado, tanto nacional como internacional. Los investigadores centran su atención en el estudio del desarrollo económico y social de los diferentes países. Los organismos internacionales utilizan las PPA, entre otros fines, para calcular el índice de desarrollo humano (Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD)), la línea de pobreza (por ejemplo, en relación con los Objetivos de Desarrollo de Sostenible) y las cuotas de aporte al Fondo Monetario Internacional (FMI).

Un concepto en el que se interesan tanto el sector privado como el sector público es el tipo de cambio de equilibrio, es decir, el tipo de cambio nominal a largo plazo. Hay múltiples debates en torno a este concepto, en particular, sobre cómo calcularlo y qué aproximación se podría obtener. En muchas ocasiones, se utiliza la PPA como variable representativa del tipo de cambio de equilibrio. Cabe recordar que, en el Programa de Comparación Internacional, las PPA se calculan para un año de referencia, y después se elaboran las series mediante extrapolaciones a partir de la información disponible sobre las tasas de inflación y las variaciones de los tipos de cambio nominales. La PPA en el año de referencia es una estimación obtenida a partir de diversas fórmulas matemáticas e información estadística. Por ese motivo, se debe proceder con cautela al utilizar esa estimación como tipo de cambio de equilibrio.

D. Comparación internacional de precios

La comparación internacional de precios requiere realizar una serie de pasos. El punto de partida es la confección de una canasta de bienes y servicios respecto de la cual los diferentes países participantes deberán buscar los precios. El segundo paso es la recopilación y validación de los precios. Para ello, se utiliza la canasta de bienes definida junto con las especificaciones de cada bien o servicio. Es fundamental sustituir los precios de los productos más cercanos a las especificaciones, ya que, al tratarse de un análisis de ámbito mundial, para que se puedan comparar los precios, se debe cotizar el mismo producto en todos los países. El tercer paso, que es casi simultáneo a los anteriores, es la compilación de la información proveniente de las cuentas nacionales respecto de las ponderaciones, para poder elaborar los agregados de las PPA. La cuarta etapa consiste en la estimación de las PPA. Dicha estimación se realiza desde el nivel más desagregado de la estructura de las PPA conocido, por ejemplo, el encabezado básico (EB). Estas PPA se agregan en los niveles superiores hasta llegar a los principales componentes del PIB, mediante diversos métodos matemáticos. En las próximas secciones se explica cada uno de los pasos que se deben realizar para que la comparación internacional de precios sea viable.

1. Confección de las canastas de bienes y servicios

Como se mencionó en las secciones anteriores, las comparaciones de precios se pueden realizar tanto respecto de un producto específico, como de un grupo de productos, y también con los agregados macroeconómicos. A la hora de realizar comparaciones de precios de una canasta de productos entre distintos países, es necesario decidir qué productos se incorporan en la canasta. ¿Se deben incluir productos que sean representativos del país? ¿Se deben incorporar productos que, sin ser representativos, sean comparables con productos de otros países? Estas preguntas presentan, precisamente, el dilema que enfrentan los países al proponer una canasta de productos para que sean comparados. Es fundamental que cada país pueda incorporar productos “representativos”, es decir, productos a cuyo consumo sus habitantes destinen una cantidad de gasto significativa. Dicho de otro modo, productos cuya participación en el total del gasto de consumo sea relevante en un determinado país. Los productos no representativos suelen tener precios más altos, por lo que, si un país decide valuar productos no representativos y otro país productos representativos, existirán diferencias en los niveles de precios de la comparación.

Asimismo, para que la comparación sea sólida, es fundamental que se incorporen en la canasta productos “comparables”, esto es, productos con características muy similares que se puedan encontrar en los países participantes. En el manual metodológico de la ronda de 2005 del Programa de Comparación Internacional (Banco Mundial, 2008) se establece que dos o más productos se consideran comparables si sus características físicas y económicas son idénticas, o si son lo suficientemente similares como para que los consumidores se mantengan indiferentes al optar entre ellos. Se agrega en el manual que, dicho de otro modo, dos productos similares son comparables si a los consumidores les resulta indiferente cuál de ellos consumen. Ello implica que los consumidores no están dispuestos a pagar un precio mayor por uno de ellos en comparación con el otro.

Si un país cuenta con un producto representativo pero este no se consume en otros países, ese producto no es comparable. Por otra parte, existen productos que están en todos los mercados y son comparables, pero puede suceder que en un determinado país no sean representativos. Esa tensión entre representatividad y comparabilidad es inherente a la construcción de una canasta de productos internacional. Por ese motivo, a la hora de definir los productos con respecto a los que se realizará la recopilación de precios, es imprescindible tomar en cuenta tanto los productos representativos como los productos comparables.

El primer paso para realizar comparaciones de precios es la definición de una canasta de productos y su clasificación en grupos, clases y categorías. El PCI adopta como primer nivel en la estructura de clasificación de la canasta de productos el “encabezado básico”. El EB es el nivel más desagregado para el que las cuentas nacionales pueden proveer una ponderación, a fin de realizar posteriormente la agregación de la información hasta obtener los agregados macroeconómicos. En las mediciones de las PPA de 2005 y 2011 (rondas de 2005 y de 2011), el PIB de cada país se desglosó en 155 encabezados básicos. Asimismo, cada encabezado básico agrupa un conjunto de productos de características homogéneas para los que se puede calcular una paridad del poder adquisitivo. Existe una descripción sumamente detallada para cada producto que compone un EB, que será tenida en cuenta por los responsables de la recopilación de precios sobre el terreno. El concepto de “encabezado básico” es similar al de “índices elementales” en el contexto del cálculo del índice de precios al consumidor.

Siguiendo la estructura de agregación utilizada en el PCI, los encabezados básicos se agrupan en “clases”, que conforman “grupos”. Los grupos forman “divisiones” y estas forman un agregado principal, por ejemplo, el “Gasto de Consumo Individual de los Hogares”.

2. Recolección y validación de los datos sobre precios

Una vez definida la lista de productos, consensuadas sus especificaciones y clasificados los productos, se procede a realizar el operativo sobre el terreno para recolectar los datos sobre precios requeridos. Es importante señalar que, antes de empezar, se deben seleccionar los establecimientos que se encuestarán para obtener el precio de cada producto. Cada país utiliza distintas técnicas para la recopilación de los precios. Algunos países utilizan planillas de papel que contienen las especificaciones de los productos y otros emplean instrumentos tecnológicos, como computadoras portátiles. La introducción de los datos en una base es un paso decisivo, ya que, cuanto más precisa sea la base de datos, mejor preparada estará la información para la etapa de validación de datos. En esta etapa, en aquellos países que carecen de tecnología para la recopilación digital de los precios, es frecuente encontrar errores en la introducción de datos.

Al finalizar el proceso de recopilación, se procede a la validación de los datos. Este procedimiento hace referencia a la evaluación de la calidad de la información recogida, la detección de valores extremos y la corrección de errores. En la comparación internacional de precios, este procedimiento tiene dos etapas. La primera se realiza en cada país participante y se conoce como validación *intra* país. La segunda etapa consiste en la validación entre países, que es justamente cuando se evalúa la comparabilidad de los datos recogidos. Estos procedimientos se realizan mediante instrumentos estadísticos, como los cuadros Quaranta y Dikhanov, entre otros.

3. Recopilación de información para realizar las ponderaciones

Simultáneamente a la reunión de los datos sobre los precios, se debe recopilar la información proveniente de las cuentas nacionales respecto de las ponderaciones de cada uno de los EB que componen el PIB. Todos los países calculan el PIB por medio de alguno de los métodos establecidos. El PCI requiere que los países dispongan de los datos del PIB desde el lado del gasto. Si un país cuenta únicamente con el cálculo desde el punto de vista de la producción, se deberá realizar una estimación con la estructura requerida para realizar la comparación internacional.

Una cuestión importante que se debe tener en cuenta es que las últimas comparaciones internacionales se realizaron en el marco del *Sistema de Cuentas Nacionales 1993*. En la actualidad, algunos países están avanzando en la implementación del *Sistema de Cuentas Nacionales 2008*, pero hay un conjunto de países que aún no han puesto en práctica las recomendaciones del *Sistema de Cuentas Nacionales 1993*. Ello dificulta la comparabilidad de los componentes del PIB.

No todos los países cuentan con un grado elevado de desagregación del PIB, por lo que deben recurrir a otras fuentes de información para obtener la desagregación solicitada. Entre esas fuentes figuran las encuestas de gastos de los hogares, los cuadros de oferta y utilización de bienes y servicios, y las matrices de insumo-producto.

Al igual que la información sobre el componente de precios, las ponderaciones deben pasar por un exhaustivo proceso de validación, tanto en la etapa *intra* país como en la etapa entre países. Es necesario asegurar la comparabilidad de las estructuras, ya que las ponderaciones tienen una alta incidencia en la estimación de los niveles agregados de la PPA.

4. Estimación de la paridad del poder adquisitivo

A grandes rasgos, la estimación de la PPA consta de dos etapas fundamentales: la estimación a nivel de encabezado básico y la agregación para obtener los niveles superiores de los componentes del PIB. En cada etapa se utilizan diversos métodos matemático-estadísticos. A continuación, se presenta la explicación de los métodos que se emplean con más frecuencia.

a) Estimación de la paridad del poder adquisitivo a nivel de encabezado básico

Es fundamental tener en cuenta cuáles son los datos necesarios a nivel de EB para poder llevar a cabo el proceso de estimación de las PPA. Esta cuestión está relacionada con la cantidad de productos respecto de los que cada país brinda información de precios.

La cantidad de productos sobre los que se recogen los precios en un determinado EB y la superposición de datos entre los países pueden dar lugar a resultados diferentes según el método de cálculo que se utilice. Si todos los países participantes proporcionan el precio de todos los productos de un encabezado básico, los principales métodos de estimación de la paridad del poder adquisitivo a nivel de EB —el método país-producto simulado (PPS) (*country-product-dummy* (CPD)) y el del índice de Jevons combinado con el método GEKS[1]— conducirán a PPA idénticas, lo que elimina la necesidad de elegir uno de los métodos.

Como ya se ha señalado, el EB es el mayor nivel de desagregación del que se disponen ponderaciones provenientes del sistema de cuentas nacionales. Por debajo del EB, se carece de información sobre los ponderadores. El insumo principal de la estimación de las PPA a nivel de EB son los precios promedio de los productos que lo componen. Del mismo modo a lo que se expuso en la sección sobre las comparaciones en el tiempo, para calcular el precio promedio existen tres tipos de fórmulas: el promedio aritmético, el promedio geométrico y el promedio armónico. En el Programa de Comparación Internacional se optó por utilizar el promedio aritmético.

En cuanto a la disponibilidad de datos propiamente dicha, es importante examinar tres posibles escenarios. Sea N la cantidad de productos que conforman un determinado EB, y C la cantidad de países que participan en la comparación de precios en una región. P_i^c es el precio del producto i en el país c (i = 1, ..., N y c = 1, ..., C), donde se asume que el precio es estrictamente positivo. Se pueden dar los tres escenarios siguientes: i) todos los países proporcionan los precios de todos los productos del EB (matriz completa); ii) no todos los productos son valuados en todos los países, obteniéndose una matriz incompleta de precios, o iii) algunos productos solo pueden ser valuados en un único país de la región.

1 Denominado así por las iniciales de sus autores: Gini, 1924 y 1931; Éltető y Köves, 1964, y Szulc, 1964.

En el ejemplo que se presenta en el cuadro IV.1, en la matriz 1, aunque faltan los precios de ciertos productos en algunos países, se pueden calcular las PPA para este EB porque se superponen los datos entre los países que participan en la comparación. Solo se tiene el precio del producto 4 en el país A, por lo que no puede ser tenido en cuenta para calcular la PPA. Para incluir un producto en el cálculo de la PPA de un determinado EB, se debe disponer del precio, al menos, de dos países. En la matriz 2, se tiene el precio de los productos 1 y 5 en los países A y B, y el de los productos 2 y 3, en los países C y D. Si bien es posible comparar precios entre los países A y B, por una parte, y C y D, por la otra, no es posible realizar una comparación entre los cuatro países porque no se dispone de precios de productos que se superpongan en todos los países que participan en la comparación. Cabe extraer tres conclusiones: i) si una matriz de precios está incompleta, se puede realizar una comparación de precios entre todos los países de la región participantes solo si existen superposiciones de los productos de los que se obtuvieron los precios; ii) si se dispone del precio de un producto únicamente en un país, ello no afectará el cálculo de la PPA de un determinado EB, y iii) cuando se cuente con una matriz incompleta, la solidez de la estimación de la PPA dependerá de las interconexiones y superposiciones de los precios entre los países participantes.

Cuadro IV.1

Datos de productos para el encabezado básico 1

Encabezado básico 1	Matriz 1				Matriz 2			
	País A	País B	País C	País D	País A	País B	País C	País D
Producto 1	10	40	50	100	10	40		
Producto 2	12	16					25	55
Producto 3		15	30				15	40
Producto 4	4				4			
Producto 5	25			100	25	80		

Fuente: Elaboración propia.

Antes de comenzar el cálculo de la PPA, se debe identificar qué propiedades se esperan de los métodos de estimación de las PPA. Para ello, se puede utilizar un ejemplo simple de las PPA para un solo producto entre dos países. Cabe recordar que la PPA entre las monedas de los países A y B se define como la cantidad de unidades monetarias del país A que tienen el mismo poder adquisitivo que una unidad monetaria del país B.

Supongamos que P_i^j y P_i^k son, respectivamente, los precios del producto i en los países j y k. La PPA para el país k con respecto al país j para el producto i se define como:

(ecuación 1)
$$PPA^{jk} = \frac{p_i^k}{p_i^j}$$

La PPA depende del producto seleccionado i. Para un determinado producto i, se observa la siguiente propiedad de transitividad:

(ecuación 2) $$PPA^{jk} = \frac{p_i^k}{p_i^j} = \frac{p_i^k}{p_i^m}.\frac{p_i^m}{p_i^j} = PPA^{jm}.PPA^{mk}$$

Esta ecuación muestra que la PPA entre los países j y k es igual a la comparación indirecta derivada por medio de un tercer país m. Esta ecuación garantiza el nivel de consistencia interna requerida para las comparaciones internacionales. Esta propiedad se conoce como propiedad de "transitividad"; la ecuación demuestra que, cuando se estiman PPA para un solo producto, esta propiedad se satisface automáticamente.

La PPA multilateral, representada por la matriz de PPA de comparaciones entre todos los pares de países participantes, y basada en más de un producto, es transitiva si, para cualquier grupo de tres países de la comparación, por ejemplo, j, k y m, la PPA directa para el país k con respecto al país j es igual a la PPA indirecta que se obtiene mediante un tercer país, m:

(ecuación 3) $$PPA^{jk} = PPA^{jm}.PPA^{mk} = \frac{PPA^{mk}}{PPA^{mj}}$$

El último término de la ecuación requiere que PPA^{jm} sea la recíproca de PPA^{mj}. Dado que las PPA definidas para un solo producto son automáticamente transitivas, y que las PPA basadas en datos de precios de múltiples productos en un EB requieren algún tipo de promedio, es necesario considerar solo aquellos métodos que mantengan la propiedad de transitividad.

Otra propiedad importante que deben cumplir las PPA multilaterales es la invariancia respecto del país base. Ello se debe a la importancia de que todos los países participantes en la comparación sean tratados de forma simétrica y que ningún país tenga un estatus especial.

Tradicionalmente, se han utilizado dos métodos para calcular las PPA a nivel de encabezado básico. Uno es el índice de Jevons, empleado en el cálculo de los índices de precios (IP) elementales, combinado con el método GEKS. Un método alternativo, elaborado originalmente por Summers (1973), utiliza el modelo de regresión PPS, como un camino para completar y asignar los datos de precios que faltan. El PPS también se utilizó como método de agregación por debajo del nivel del EB en rondas del Programa de Comparación Internacional dirigidas por Kravis y otros (Kravis, Heston y Summers, 1982). En años recientes, se ha prestado atención a dicho modelo en los estudios de Prasada Rao (1990, 2004, 2005 y 2009), Sergeev (2002 y 2003), Diewert (2004, 2005 y 2010), Prasada Rao y Timmer (2003), y Hill y Timmer (2006). En las siguientes secciones se explican ambos métodos. Dicha explicación se ha basado en los capítulos 4 y 5 del libro del PCI titulado *Measuring the Real Size of the World Economy: The Framework, Methodology, and Results of the International Comparison Program–ICP* (Banco Mundial, 2013).

i) *Método Jevons-GEKS*

La Oficina Estadística de la Unión Europea (Eurostat) emplea el método Jevons-GEKS desde 1980 para calcular las paridades a nivel de EB. También se utiliza ese método en el PCI dirigido por Eurostat y la Organización de Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE). El elemento básico del cálculo es el índice de Jevons, que es la principal fórmula de números índices empleada para calcular los índices de precios elementales en la elaboración del IPC. El índice de Jevons, por sí mismo, no permite realizar comparaciones transitivas, excepto en el caso específico de que todos los países proporcionen precios para todos los productos que componen el EB. Este índice se transforma apropiadamente mediante el método GEKS y, de esa manera, se utiliza en el cálculo de las PPA a nivel de EB. Dado que el programa de Eurostat y la OCDE recopila información fiable sobre la representatividad de ciertos productos, el método Jevons-GEKS se modifica para poder tomar en cuenta esa información adicional.

Se pueden dar los siguientes escenarios:

- Todos los productos tienen precio en todos los países participantes, y no hay ponderaciones por representatividad o importancia. En ese caso, se utiliza el índice de Jevons.
- Se dispone de una matriz de datos incompleta, en la que no todos los productos tienen precio en todos los países, pero se considera que todos los productos tienen la misma ponderación. En este caso, se emplea el método Jevons-GEKS para derivar una comparación transitiva.
- Este último escenario hace referencia al caso más general, en el que la matriz de precios está incompleta. Al mismo tiempo, se realiza una distinción entre los productos representativos y los no representativos. Dado que los productos representativos se marcan con un asterisco (*), el método que se emplea en este caso se denomina Jevons-GEKS*.

Escenario 1: matriz de precios completa, sin ponderaciones

Es el caso más simple, en el que los N productos tienen precio en los C países, y todos son considerados con la misma importancia. Las PPA para un determinado EB se pueden calcular de la forma siguiente:

(ecuación 4)
$$PPA_{jk}^{jevons} = \prod_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^k}{p_i^j}\right]^{\frac{1}{N}}$$

Para todo j, k = 1, ..., C

Este índice es una simple media geométrica de todos los relativos de precios, en los países j y k, para todos los productos de un EB. Las PPA que resultan de este cálculo son transitivas y no varían respecto del país base.

Escenario 2: matriz de precios incompleta, sin ponderaciones

Se trata de los casos en los que no todos los países cuentan con precios para todos los productos que forman un EB. Sea N_j la cantidad de productos de los N productos de un EB de los que el país j tiene precios. Además, supóngase que todos los datos de precios están conectados de manera que sea posible la comparación. Cabe señalar que toda comparación binaria entre los países j y k se puede realizar sobre la base de superponer datos de precios que consistan en los productos comúnmente cotizados. Si un producto no se ha cotizado en alguno de los dos países, no se puede incorporar en el cómputo de la PPA. Así, N_{jk} representa el conjunto y el número de productos del EB de los que se dispone de precios, tanto en el país j como en el país k. Entonces, la PPA de una comparación binaria entre los países j y k viene dada por la siguiente ecuación:

(ecuación 5) $$PPA_{jk}^{jevons} = \prod_{i \in N_{jk}} \left[\frac{p_i^k}{p_i^j} \right]^{\frac{1}{N_{jk}}}$$

La PPA binaria, basada en los productos de los que ambos países cuentan con precios, expresada en la ecuación 5, no es transitiva. El método GEKS es una técnica que genera índices multilaterales transitivos (PPA), que se pueden expresar como PPA_{jk}^{EKS} mediante la siguiente ecuación:

(ecuación 6)

$$PPA_{jk}^{jevons\ EKS} = \prod_{l=1}^{C} \left[PPA_{jl}^{jevons} . PPA_{lk}^{jevons} \right]^{\frac{1}{C}} = \prod_{l=1}^{C} \left[\prod_{i \in N_{jl}} \left[\frac{p_i^l}{p_i^j} \right]^{\frac{1}{N_{jl}}} . \prod_{i \in N_{lk}} \left[\frac{p_i^k}{p_i^l} \right]^{\frac{1}{N_{lk}}} \right]^{\frac{1}{C}}$$

Las PPA obtenidas mediante el método Jevons-GEKS cumplen con las propiedades de transitividad y de invariancia respecto del país base.

Escenario 3: matriz de precios incompleta, con asteriscos que señalan productos importantes

Considérense los casos en que los productos se identifican como "representativos" y "no representativos" en los diferentes países. Los productos representativos se marcan con un asterisco. Para tomar en cuenta la representatividad, se modifica el índice Jevons-GEKS. La modificación viene dada por el hecho de que, para cualquier par de países j y k, puede haber: i) un conjunto de productos cotizados y representativos en ambos países; ii) un conjunto de productos cotizados representativos en el país j, pero no en el país k; iii) un conjunto de productos cotizados representativos en el país k, pero no en el país j, y iv) un conjunto de productos cotizados que no son representativos ni en el país j ni en el país k. En estos casos, se emplea la siguiente notación:

N_{jk} representa el número de productos que son representativos en j o en k de los que se ha informado de los precios en ambos países;

N_{jk}^R representa el conjunto y el número de productos que son representativos en el país j y de los que el país k tiene precios (es posible que no todos ellos sean representativos en el país k), y

N_{kj}^{R} representa el conjunto y el número de productos que son representativos en el país k y de los que el país j tiene precios (es posible que no todos ellos sean representativos en el país j).

La PPA en una comparación binaria entre k y j, basada únicamente en productos representativos en el país j, está dada por la siguiente ecuación:

(ecuación 7) $$PPA_{jk}^{jevons\,(j-*)} = \prod_{i \in N_{jk}^{R}} \left[\frac{p_i^k}{p_i^j}\right]^{\frac{1}{N_{jk}^{R}}}$$

Se puede calcular una medida de PPA igualmente significativa utilizando los productos representativos de los que el país j tiene precios, que viene dada por la siguiente ecuación:

(ecuación 8) $$PPA_{jk}^{jevons\,(k-*)} = \prod_{i \in N_{kj}^{R}} \left[\frac{p_i^k}{p_i^j}\right]^{\frac{1}{N_{kj}^{R}}}$$

Desde una perspectiva estadística o analítica, las dos medidas de PPA dadas en las ecuaciones 7 y 8 son igualmente deseables, porque ambas emplean los productos representativos cotizados en un determinado país y también en el otro país participante. De esta forma, la PPA basada en un índice Jevons asterisco (*) entre el país k y el país j puede determinarse mediante una media geométrica de las PPA de las ecuaciones 7 y 8. El índice de Jevons que toma en cuenta la representatividad puede definirse de la siguiente manera:

(ecuación 9)

$$PPA_{jk}^{Jevons*} = \left[PPA_{jk}^{jevons\,(j-*)} . PPA_{jk}^{jevons\,(k-*)}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\prod_{i \in N_{jk}^{R}} \left[\frac{p_i^k}{p_i^j}\right]^{\frac{1}{N_{jk}^{R}}} . \prod_{i \in N_{kj}^{R}} \left[\frac{p_i^k}{p_i^j}\right]^{\frac{1}{N_{kj}^{R}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Debido a que $PPA_{jk}^{Jevons*}$ en se emplea únicamente información de los países j y k de la matriz de precios, las PPA resultantes no son transitivas, aunque se trate de una matriz completa. Por ese motivo, es necesario utilizar el procedimiento GEKS, que permite obtener paridades transitivas que tienen en cuenta la representatividad:

(ecuación 10) $$PPA_{jk}^{jevonsGEKS*} = \prod_{l=1}^{C} \left[PPA_{jl}^{jevons*} . PPA_{lk}^{jevons*}\right]^{\frac{1}{C}}$$

Estas PPA son transitivas e invariantes respecto del país base.

ii) *Método país-producto simulado (PPS)*

El método PPS fue introducido por Summers (1973), que propuso un simple modelo de regresión para completar los datos faltantes en la matriz de precios de un encabezado básico. Este método se utilizó en sucesivas rondas del Programa de Comparación Internacional para calcular la PPA a nivel de EB.

Este método tiene por objetivo estimar las PPA mediante una regresión lineal, cuyas variables independientes son variables ficticias por país y por producto, y la variable dependiente es el logaritmo del precio del producto. Las paridades se calculan empleando un país como base.

El supuesto del modelo PPS es que, para cualquier par de países, las PPA de los productos individuales de un EB son constantes, además de tomar en consideración un error aleatorio. Ello equivale a aceptar que los precios relativos de los distintos productos que componen un EB son iguales.

Manteniendo la notación utilizada en las secciones anteriores, sea p_i^j el precio del producto i en el país j (i = 1, ..., N; j = 1, ..., C). Es sumamente útil enunciar el modelo PPS en una forma que esté directamente relacionada con las comparaciones internacionales. El modelo estadístico básico subyacente en el método PPS se puede enunciar de la siguiente manera:

(ecuación 11) $$p_i^j = PPA_j P_i u_{ij}$$

Donde:

PPA_j : paridad de poder adquisitivo de la moneda del país j

P_i : precio promedio internacional del producto i

u_{ij} : variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas

Se asume que estas variables tienen una distribución lognormal, o que el ln(u_{ij}) está distribuido normalmente, con media cero y varianza σ^2.

Cabe formular una serie de observaciones. En primer lugar, los precios utilizados en el modelo PPS pueden ser considerados como observaciones de precios individuales de cada producto, en cada uno de los países donde dicho precio se cotiza. El modelo es suficientemente flexible como para poder tomar en cuenta más de una observación por producto y por país. En segundo lugar, en el PCI se utiliza únicamente una observación individual que representa el precio promedio anual en un país. Si se dispone de información respecto del error estándar asociado al precio promedio, esa información se puede incorporar al modelo, utilizando distintas varianzas para diferentes productos. En tercer lugar, al modelo de la ecuación 11 se lo suele denominar la "ley de un solo precio", ya que parte de un precio promedio único para un producto en todos los países P_i , y de una única medida del nivel de precios para cada país, representada por PPA_j. Por último, el modelo PPS puede ser descrito como un modelo de regresión hedónica, en el que las características utilizadas son las especificaciones de los países y los productos. El modelo PPS puede formularse como un modelo de regresión hedónica estándar, usando precios logarítmicos. Si se emplean logaritmos en ambos lados de la ecuación, se obtiene lo siguiente:

(ecuación 12) $$\ln\left(p_j^i\right) = \ln(PPA_j) + \ln(p_i) + \ln(u_{ij}) = \alpha_j + \gamma_i + v_{ij}$$

Donde ν_{ij} son términos de errores aleatorios, que son independientes y están idénticamente distribuidos (normalmente), con media cero y varianza σ^2. El modelo PPS puede ser considerado como un modelo de efectos fijos simple, en el que los efectos de los países proveen estimaciones de las PPA y los efectos específicos de los productos proveen estimaciones de los precios internacionales.

El parámetro α_j se interpreta como el nivel de precios general en el país j en relación con los precios de otros países incluidos en la comparación. Se puede expresar α_j relativo a un país de referencia, por ejemplo, el país 1. Entonces, α_j representa la PPA del país j, mostrando la cantidad de unidades monetarias del país j que tienen el mismo poder adquisitivo que una unidad monetaria del país de referencia 1. La PPA para el país j viene dada por la siguiente ecuación:

(ecuación 13) $$PPA_j = \exp(\hat{\alpha}_j)$$

Como la PPA estimada depende de los valores de los parámetros estimados, se pueden derivar los errores estándares asociados PPA_j a la , lo que no es posible cuando se utiliza el índice de Jevons.

El modelo se llama PPS (país-producto simulado) porque puede expresarse como una ecuación de regresión en la que todas las variables explicativas (regresores) son esencialmente variables ficticias o simuladas (una para cada país y una para cada producto). El modelo básico $p_j^i = \alpha_j + \gamma_i + v_{ij}$ se puede expresar de la siguiente manera:

(ecuación 14)

$$y_{ij} = \ln(p_j^i) = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \cdots \alpha_c D_c + \eta_1 D_1^* + \eta_2 D_2^* + \cdots + \eta_N D_N^* + v_{ij}$$

Donde D_j (j = 1, 2, ..., C) y D_j^* (i = 1, ..., N) son, respectivamente, las variables ficticias de país y de producto.

La ecuación 14 se puede formular así:

$$y_{ij} = x_{ij}\beta + v_{ij}$$

Donde $x_{ij} = [D_1 D_2 \ldots D_c D_1^* D_2^* \ldots D_N^*]$ y $\beta = [\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_c \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_N]'$ y los valores de las variables ficticias están determinados en la observación i-j.

Se considera la situación en la que todos los productos de un encabezado básico tienen precios en todos los países. En este caso, para la agregación a nivel de EB donde no hay ponderaciones, los parámetros α_j y η_i se pueden estimar utilizando un simple método de mínimos cuadrados ordinarios sin ponderaciones, minimizando la siguiente expresión:

(ecuación 15) $$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{C} (\ln(p_j^i) - \alpha_j - \gamma_i)^2$$

Las condiciones de primer orden para la optimización con respecto a α_j y γ_i conducen a un sistema de C+N ecuación y la misma cantidad de incógnitas:

(ecuación 16)
$$\alpha_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(p_j^i) - \sum_{i=1}^{N}\gamma_i$$

Para j = 1, 2, …, C

y (ecuación 17)
$$\gamma_i = \frac{1}{C}\sum_{j=1}^{C}\ln(p_j^i) - \sum_{j=1}^{C}\alpha_j$$

Para todo i = 1, 2, …, N

Este sistema se puede resolver imponiendo restricciones lineales sobre los parámetros desconocidos. Por ejemplo, si $\alpha_1 = 0$, se puede demostrar fácilmente que, para j = 2, …, C:

(ecuación 18)
$$\alpha_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln(p_j^i) - \ln(p_1^i)$$

O también (ecuación 19)
$$PPA_j = \exp(\hat{\alpha}_j) = \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{p_j^i}{p_1^i}\right]^{\frac{1}{N}}$$

Utilizando las soluciones de la ecuación 15, la comparación de los niveles de precios entre los países j y k, representada por la PPA_{jk} puede derivarse de la siguiente forma:

(ecuación 20)
$$PPA_{jk} = \frac{\exp(\widehat{\alpha_k})}{\exp(\hat{\alpha}_j)} = \prod_{i=1}^{N}\left[\frac{p_k^i}{p_j^i}\right]^{\frac{1}{N}}$$

La PPA obtenida mediante el modelo PPS es idéntica al índice de Jevons presentado en las secciones anteriores. Esta PPA es transitiva e invariante respecto del país base. La única diferencia es que, como en el método PPS se utiliza un modelo de regresión, se puede derivar un error estándar asociado a cada PPA_{jk}. Prasada Rao (2004) demostró que la varianza estimada de PPA_{jk} viene dada por la siguiente ecuación:

(ecuación 21)
$$\text{est var}(\hat{\alpha}_j) = \frac{2}{N}\widehat{\sigma^2}$$

Donde $\widehat{\sigma^2}$ es un estimador insesgado de σ^2 dado por:

(ecuación 22)
$$\widehat{\sigma^2} = \frac{\sum_{j=1}^{C}\sum_{i=1}^{N}e_{ij}^2}{CN-(C+N-1)}$$

Donde $e_{ij} = \ln(p_j^i) - \hat{\alpha}_j - \hat{\gamma}_i$ es el residuo de mínimos cuadrados.

Usando la ecuación 22, la varianza estimada de PPA_{jk} con el país 1 como país base, puede expresarse como:

(ecuación 23) $$Estvar\ (PPA_{jk}) \approx Est\ var\ \hat{\alpha}_J . \hat{\alpha}_J^{\ 2}$$

Cuando la matriz de precios se encuentra incompleta, se puede utilizar el método PPS siempre que los datos de la matriz tengan superposiciones entre países. Cabe emplear el modelo PPS y su estimación por mínimos cuadrados con algunas modificaciones.

Se puede extender el modelo base para tener en cuenta la representatividad de los productos y, de esta manera, evitar sesgos. Ello se debe a que los productos representativos suelen ser más baratos que los no representativos. Ello significa que, además de las dimensiones de país y de producto utilizadas en el modelo PPS, se considera que la dimensión de la representatividad es crítica y, por lo tanto, debe ser incluida.

La incorporación del concepto de representatividad es bastante directa, ya que se incorpora una variable ficticia para la representatividad. En este caso, se define una variable ficticia R para cada observación de precios, que toma el valor 0 si el producto es no representativo y el valor 1 si el producto es representativo. El modelo básico se puede extender de la siguiente manera para incorporar la representatividad:

(ecuación 24):

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \ln\left(p_j^i\right) = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \cdots \alpha_c D_c + \eta_1 D_1^* + \eta_2 D_2^* + \cdots + \eta_N D_N^* + \delta R + v_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{c} \alpha_j D_j + \sum_{i=1}^{N} \eta_i D_i^* + \delta R + v_{ij} \end{aligned}$$

Los parámetros de este modelo se pueden estimar mediante el método de mínimos cuadrados ordinarios, luego de imponer una restricción de numerario, igualando una de las α_j a 1. Las estimaciones de las PPA obtenidas están esencialmente ajustadas por el sesgo hacia arriba, provocado por las observaciones de precios que no son representativas. Se espera que, en el caso general donde los productos no representativos son más caros, el estimador de δ sea positivo.

Debido a los problemas conceptuales que existen para determinar la representatividad de un producto, se incorporó el concepto de importancia. En la ronda de 2011 del Programa de Comparación Internacional, los productos identificados como importantes tuvieron una ponderación de 3 en comparación con los no importantes, cuya ponderación fue de 1. Dichas ponderaciones fueron sugeridas por el Grupo Técnico Asesor de la ronda de 2011 del PCI. Incorporar ponderaciones a las observaciones de precios en el contexto del modelo PPS resulta fácil, ya que es equivalente a correr una regresión de mínimos cuadrados ponderados, en lugar de una regresión de mínimos cuadrados sin ponderar. Se supone que w_{ij} es la ponderación asociada a la observación del precio del producto i en el país j. Entonces, el método de mínimos cuadrados ponderados minimiza la siguiente expresión con respecto a los parámetros desconocidos:

(ecuación 25)

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{C} w_{ij}(\ln(p_j^i) - \alpha_j - \gamma_i)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{C} w_{ij}(\ln(p_j^i) - \alpha_1 D_1 - \alpha_2 D_2 - \cdots - \alpha_c D_c - \eta_1 D_1^* - \eta_2 D_2^* - \cdots - \eta_N D_N^*)^2$$

Si la información respecto a la verdadera ponderación en el gasto de cada producto estuviera disponible, se podría incorporar fácilmente en la estimación de las PPA.

iii) *Vinculación de las regiones a nivel de encabezado básico*

En el PCI, los países participan en una primera instancia de las comparaciones regionales. Los métodos descritos hasta el momento para estimar las PPA a nivel de EB se aplican en cada región. Pero, ¿cómo se realizan las comparaciones a nivel mundial?

En la ronda de 2005 del PCI, la vinculación de las regiones se hizo mediante países "anillo". Dichos países fueron representantes de sus respectivas regiones en la comparación mundial. El elemento más importante fue el requisito de constancia (*fixity*), que establece que las relatividades entre las PPA de las monedas de los países de una región deben permanecer inalterables en el proceso de conversión para obtener un numerario mundial.

Los pasos realizados en 2005 fueron los siguientes:

Se compilaron las PPA para las monedas de los países de cada una de las regiones, utilizando una moneda como numerario regional para los 155 EB que componen el PIB.

Se identificó un conjunto de países para que participaran en el "anillo" comparativo.

Todos los países anillo recopilaron precios adicionales de una lista de precios "anillo". La Oficina Mundial del PCI preparó esa lista, que se basó en las listas regionales. Este procedimiento se empleó únicamente para el agregado de consumo de los hogares, ya que el resto de los componentes siempre contó con una lista mundial.

Se emplearon los datos de precios de la lista anillo para calcular los coeficientes de vinculación, que, a su vez, se utilizaron para convertir la moneda numerario regional en la moneda numerario mundial. Se utilizó el dólar de los Estados Unidos como numerario mundial.

En la ronda de 2011 se utilizó otro método, el de la lista mundial. La Oficina Mundial preparó una lista con 600 productos que se podían encontrar en todos los países, independientemente de su grado de desarrollo. Se realizaron los siguientes pasos:

Se incluyeron productos de la lista mundial en las listas de cada región.

Se pidió a las regiones que dieran los precios de la mayor cantidad posible de productos de la lista mundial.

Se utilizaron productos de la lista mundial y de las listas regionales en el cálculo de las PPA de los encabezados básicos.

Se aseguró que los factores de vinculación de las PPA de los EB a nivel regional empleasen precios de productos de la lista mundial y de la lista regional.

Se aplicó el método PPS, utilizando precios de la lista mundial de todos los países participantes en la ronda de 2011.

iv) ***Agregación de paridades del poder adquisitivo superiores al encabezado básico***

Existen varios métodos para agregar las PPA del nivel de encabezado básico hacia niveles superiores. En rondas anteriores del Programa de Comparación Internacional, los métodos más utilizados fueron el método GEKS y el método Geary-Khamis, que es un método aditivo.

Método GEKS

Sea N igual a 155 (que es el número de encabezados básicos del PCI) y K la cantidad de países de la comparación regional para un año de referencia. La PPA para un EB en una categoría de productos n, en el país k, se denota como $p_n^k > 0$. El correspondiente gasto (en unidades de la moneda local) en la categoría de productos n en el país k es e_n^k, para n = 1, ..., N y k = 1, ..., K. Partiendo de esta información, se pueden definir volúmenes o niveles de cantidades explícitos q_n^k para cada uno de los EB n y para cada país k, como el gasto deflactado por la PPA correspondiente:

(ecuación 1) $$q_n^k \equiv \frac{e_n^k}{p_n^k}$$

Para n = 1, ..., N y k = 1, ..., K

Resulta útil definir las ponderaciones de gastos en bienes de un país como s_n^k, para el EB n y para el país k, como:

(ecuación 2) $$s_n^k \equiv \frac{e_n^k}{\sum_{i=1}^{N} e_i^k}$$

Para n = 1, ..., N y k = 1, ..., K

Se definen los vectores de los países de las PPA a nivel de EB como $p^k \equiv [p_1^k, \dots, p_N^k]^T$, los vectores de los países de los volúmenes a nivel de EB como $q^k \equiv [q_1^k, \dots, q_N^k]^T$, los vectores de los países del gasto como $e^k \equiv [e_1^k, \dots, e_N^k]$, y los vectores de los países de las ponderaciones como $s^k \equiv [s_1^k, \dots, s_N^k]^T$, para k = 1, ..., K.

Para definir las paridades GEKS P^1 P^2,..., P^K entre los K países que participan en la comparación, primero se define el índice de precios ideal bilateral de Fisher P_F entre el país j relativo a k:

(ecuación 3) $$P_F\,(p^k, p^j, q^k, q^j) \equiv \left[\frac{p^j.q^j p^j.q^k}{p^k.q^j p^k.q^k}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Para j = 1, …, K y para k = 1, …, K

El IP de Fisher es el promedio geométrico del IP de Laspyeres entre los países j y k $P_L\left(p^k, p^j, q^k, q^j\right) \equiv \frac{p^j.q^k}{p^k.q^k}$ y el IP de Paasche $P_P\left(p^k, p^j, q^k, q^j\right) \equiv \frac{p^j.q^j}{p^k.q^j}$. La PPA agregada para el país j, P^j, se define como:

(ecuación 4) $$P^j \equiv \prod_{k=1}^{K} \left[P_F\,(p^k, p^j, q^k, q^j)\right]^{\frac{1}{K}}$$

Para j = 1, …, K

Una vez definidas las P^j GEKS mediante la ecuación 4, los correspondientes gastos reales GEKS o volúmenes Q^j se pueden definir como el gasto por país p^j, q^j en el año de referencia, dividido por la correspondiente PPA GEKS P^j:

(ecuación 5) $$Q^j \equiv \frac{p^j.q^j}{P^j}$$

Para j = 1, …, K

Si se dividen todas las P^j definidas por la ecuación 4 por un número positivo α, todas las Q^j definidas por la ecuación 5 se pueden multiplicar por el mismo α sin cambiar materialmente el método GEKS multilateral. Si el país 1 es elegido como el país de referencia de la región, se debe igualar α a P^1, definida en la ecuación 4 con j = 1, y el nivel de precios resultante P^j se puede interpretar como la cantidad de unidades de la moneda del país j necesaria para comprar una unidad de la moneda del país 1 y recibir una cantidad equivalente de utilidad. El Q^j reescalado se puede interpretar como el volumen de la demanda final del país j en la unidad de moneda del país 1.

También se puede normalizar el gasto real agregado de cada país, en unidades comunes Q^K, dividiendo cada Q^K por la suma de $\sum_{j=1}^{K} Q^j$ para expresar el gasto real de cada país, o la demanda real final, como una fracción o participación del gasto real total regional, definiendo la participación del país k en el gasto real regional como S^K:

(ecuación 6) $$S^K \equiv \frac{Q^k}{\sum_{j=1}^{K} Q^j}$$

Para k = 1, …, K

Después de reescalar las PPA por un escalar α, las participaciones de los países en la demanda real final S^K quedan sin cambios.

Método Geary-Khamis

Este método fue propuesto inicialmente por Geary (1958), y más tarde Khamis (1972) demostró que las ecuaciones que lo definen tienen una solución positiva bajo ciertas condiciones.

El sistema de ecuaciones Geary-Khamis incluye K niveles de precios o PPA, $P^{1,} P^{2,} \ldots, P^{K}$, y N precios internacionales de referencia de productos de encabezados básicos $\pi_1, \ldots, \pi_N$. Las ecuaciones que determinan estas incógnitas (en esta un múltiplo de un escalar) son las siguientes:

(ecuación 7)
$$\pi_n = \sum_{k=1}^{K} \left[\frac{q_n^k}{\sum_{j=1}^{K} q_n^j} \right] \left[\frac{p_n^k}{P^k} \right]$$

Para n = 1, ..., N

(ecuación 8)
$$P^k = \frac{p^k q^k}{\pi q^k},$$

Para k = 1, ..., K

Donde $\pi \equiv [\pi_1, \ldots, \pi_N]$ es el vector Geary-Khamis de precios de referencia promedio regionales.

Si existe una solución para las ecuaciones 7 y 8, al multiplicar todos los precios de los países P^K por un escalar positivo λ y dividir todos los precios de referencia por el mismo escalar λ, se obtiene otra solución para las ecuaciones 7 y 8. Entonces, π_n y P^K están determinados solo hasta un múltiplo escalar, y es necesaria una normalización adicional, por ejemplo:

(ecuación 9)
$$P^1 = 1$$

Para poder determinar de forma única las paridades, también se puede demostrar que N+K-1 en las N ecuaciones 7 y 8 son independientes. Una vez que se determinan las paridades P^K, el gasto real o el volumen para el país k, Q^K, se puede definir como el valor nominal de la demanda final del país k en unidades de la moneda nacional $p^K q^K$, dividido por su PPA, P^K:

(ecuación 10)
$$Q^k = \frac{p^k q^k}{P^k}$$

Para k = 1, ..., K

Lo anterior es igual al πq^k usando la ecuación 8.

El segundo miembro de la ecuación 10 caracteriza el método aditivo, esto es, la demanda real final de cada país se puede expresar como la suma de los componentes de volumen de la demanda final de los EB de cada país, donde cada componente de la demanda final real se pondera mediante un precio internacional que es constante entre los países.

Por último, si la ecuación 10 es sustituida en las ecuaciones 6 de ponderaciones regionales, la participación del país k en el gasto real regional es:

(ecuación 11) $$S^k = \frac{\pi q^k}{\pi q}$$

Para k = 1, ..., K

Donde el vector de volumen total regional q se define como la suma de los vectores de volumen de los países $q \equiv \sum_{j=1}^{K} q^j$.

Las ecuaciones 10 muestran la conveniencia de tener un método de comparación multilateral aditivo: cuando los productos de los países se valúan a precios de referencia internacionales, los valores son aditivos entre países y entre productos. Sin embargo, si el número de países que participan en la comparación son más de dos, los métodos multilaterales aditivos no guardan coherencia con la comparación económica de utilidad entre países. Por otra parte, la ecuación 7 evidencia que los países más grandes tendrán una mayor contribución en la determinación del precio internacional π_n, y, en consecuencia, esos precios internacionales serán más representativos para los países más grandes que para los países más pequeños que participan en la comparación.

Existen otros métodos, como el método Ikle-Dikhanov-Balk, que son aditivos y resuelven el problema de que los países más grandes tengan más influencia que los pequeños (véase una explicación detallada y una ampliación de todos los métodos de cálculo expuestos en Banco Mundial, 2013). En el anexo A7 se presentan dos ejercicios en que se aplican las fórmulas explicadas.

E. Comparación internacional de volúmenes en el tiempo

Las oficinas de cuentas nacionales de los distintos países proporcionan información sobre el PIB y sus componentes tanto a precios corrientes como constantes. La información a precios constantes se utiliza para conocer la evolución del volumen en el transcurso del tiempo. En la mayoría de los casos, se toma un año base o de referencia, desde el que se extrapolan los datos mediante diferentes indicadores, tanto a precios corrientes como constantes, para realizar el cálculo del PIB. De esta forma, se cuenta con información para realizar comparaciones en el tiempo para un país determinado.

A modo de recordatorio, puede mencionarse que los mismos índices que se explicaron en las secciones anteriores para el cálculo de las paridades (de Laspeyres, de Paasche, de Fisher y otros) se utilizan en el contexto de las cuentas nacionales con diversas funciones. En lugar de tomar un país de referencia, se toma un período o año de referencia. Tal es el caso de los índices de precios al consumidor de canasta fija y los índices de precios al productor, entre otros.

Cuando se realizan comparaciones internacionales, lo más usual es tomar los precios corrientes de cada uno de los países y convertirlos a una moneda común, mediante el tipo de cambio de mercado respecto de algún país que se emplea como país de referencia. Como se mencionó en las secciones anteriores, este tipo de comparación no tiene en cuenta los diferenciales en los niveles de precios, por lo que la comparación de volúmenes no es del todo precisa. Por este motivo, se deben utilizar las PPA. Cabe señalar que las PPA permiten realizar comparaciones de volumen entre países para un momento determinado en el tiempo.

En síntesis, se cuenta con series temporales a precios corrientes y constantes de cada país. Es decir, que se pueden realizar comparaciones de volúmenes en el tiempo para cada país por separado. Por otra parte, el PCI proporciona una comparación de volúmenes entre países en un momento determinado.

Ahora bien, ¿qué se debería hacer para poder realizar comparaciones de volumen entre los países a lo largo del tiempo? Idealmente, se debería poder realizar una comparación internacional con una canasta común, tomando un país y un período de referencia, para, posteriormente, poder calcular una serie a precios constantes utilizando las PPA. Sería una especie de "doble ancla", tanto en términos temporales como en términos geográficos. Ello requeriría, entre otros insumos, poder contar con la información necesaria para calcular las PPA todos los años. Este camino ideal, además de ser sumamente costoso, tiene limitaciones en cuanto a la implementación simultánea en todos los países participantes.

Al no ser posible el camino ideal, se han estudiado una serie de metodologías alternativas. Una de las más utilizadas es la que emplea las PPA de los años de referencia del PCI y las extrapola mediante los IP de los distintos países y los del país de referencia. Los insumos para este cálculo son los cálculos del PIB, a precios corrientes y constantes, y los IP de los países participantes, así como las PPA calculadas por el PCI en un año de referencia. Si bien esta metodología es sencilla y de bajo costo, presenta también algunas desventajas. Como se señala en Epstein y Marconi (2014), si el año de referencia que se utiliza como base para la extrapolación está lejos del año de estimación, la calidad de los resultados puede no ser óptima debido a las desviaciones (sesgos por cambios en los precios relativos, modificaciones en la estructura o ponderación de los componentes, entre otras), que se acumulan año tras año. En ciertos casos, es posible que la evolución de los precios calculados por medio de los deflactores de las cuentas nacionales, o con los propios IPC, no refleje la situación real de un país, lo que introduce distorsiones en el análisis económico y en la formulación y evaluación de las políticas públicas.

F. Programa de Comparación Internacional

1. Presentación del programa y antecedentes

El Programa de Comparación Internacional es un proyecto estadístico de ámbito mundial, cuyo objetivo es recopilar datos comparables de precios de una amplia canasta de productos y compilar valores detallados del PIB desde el lado del gasto, para calcular las PPA. Como se utilizan las PPA para convertir los niveles de los agregados macroeconómicos, en lugar de los tipos de cambio de mercado, se puede comparar el producto de las economías y el bienestar de sus habitantes en términos reales, es decir, teniendo en cuenta la capacidad de compra en cada uno de los países.

El PCI está coordinado por el Banco Mundial, por conducto de la Oficina Mundial, y los países se agrupan por regiones, que cuentan con oficinas de coordinación regional. En el caso de América Latina y el Caribe, la coordinación regional está a cargo de la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL).

El PCI se estableció en 1968, como resultado de una labor conjunta entre la División de Estadística de las Naciones Unidas y la Dependencia de Comparación Internacional de la Universidad de Pennsylvania, con el propósito de elaborar indicadores comparables, de acuerdo al poder de compra de las diferentes monedas. Se inició como un modesto proyecto de investigación que incluyó a diez países. Sin embargo, se aspiraba a lograr un objetivo mayor: estimar las PPA a nivel mundial.

Se persiguió ese objetivo en las rondas posteriores, que se realizaron en 1970, 1973, 1975, 1980, 1985, 1993 y 2005. En cada una de ellas se amplió el número de países participantes. En todo ese período, se centró la atención en el cálculo del PIB por el lado del gasto, fundamentalmente porque las técnicas de implementación eran más sencillas, y se abandonó la idea de utilizar ambos enfoques (producción y gasto).

En 1993, el Banco Mundial asumió la coordinación mundial de este proyecto. En la ronda de ese año participaron 117 países y, por primera vez, se presentó una comparación regional de resultados. No fue hasta la ronda de 2005 cuando se logró la comparabilidad de los resultados a nivel mundial. En esa oportunidad, participaron 146 países. En la ronda de 2011, participaron en la comparación mundial 199 países.

2. Requerimientos de información

La estimación de las PPA requiere dos tipos de informaciones: precios y ponderaciones. Estas últimas provienen del desglose del PIB, desde el lado del gasto. Como ya se ha señalado, el mayor nivel de desagregación del que se disponen ponderaciones provenientes de las cuentas nacionales es el EB. El PCI ha establecido 155 EB sobre los que los países participantes deben proporcionar información. En cuanto a los precios, el punto de partida es la determinación de las canastas de productos de las que, posteriormente, se deberán obtener los precios en los países participantes. En cada EB se agrupa un conjunto de productos homogéneos de los que se buscan los precios, de acuerdo con determinadas especificaciones. Los EB se agrupan en "clases", que conforman "grupos". Los grupos forman "divisiones" y estas forman un agregado principal, por ejemplo, el "Gasto de Consumo Individual de los Hogares". A continuación se presenta un ejemplo de la estructura de la canasta de bienes y servicios para el componente de consumo de los hogares (véase el cuadro IV.2).

■ Cuadro IV.2

Ejemplo de la estructura de la canasta de bienes y servicios utilizada en el Programa de Comparación Internacional para el componente de consumo individual de los hogares

1	Producto Interno Bruto	
11	Consumo individual de los hogares	Agregado
1101	Alimentos y bebidas no alcohólicas	División
11011	Alimentos	Grupo
110111	Pan y cereales	Clase
1101111	Arroz	Encabezado básico
1101112	Otros cereales, harina y otros productos	
1101113	Pan	
1101114	Otros productos de panadería	
1101115	Pastas	
110111501	Pasta corta	Producto
110111502	Espaguetis	
110111503	Fideos secos	
110111504	Fideos instantáneos	
110111505	*Vermicelli* (cabello de ángel)	
110111506	Macarrones	

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de Programa de Comparación Internacional (PCI), "ICP Global Core List", documento presentado en la Tercera Reunión del Grupo de Asesoramiento Técnico, París, 10 y 11 de junio de 2010.

La ronda de 2011 del PCI se inició a nivel mundial en 2010, y en ella se definió como año de referencia el año 2011. La Oficina Mundial elaboró una lista de productos para los componentes del PIB por el lado del gasto (consumo de los hogares y formación bruta de capital, entre otros), que permitiera estimar los precios promedios para cada EB. En la lista de productos del consumo de los hogares, se utilizó la "Clasificación de gastos por finalidades", que se apoya en la Clasificación del Consumo Individual por Finalidades[2].

3. Los precios

En el marco del PCI, una vez consensuada la lista de bienes y servicios en cada una de las regiones, se procedió a la recopilación de los precios. Se realizaron cuatro tomas de precios para 2011, una por trimestre, en cada una de las regiones participantes, de acuerdo con sus

2 http://unstats.un.org/unsd/cr/registry/regcst.asp?Cl=5&Lg=3.

calendarios de recopilación. Los países participantes fueron reuniendo la información e introduciendo los datos en el software de validación de datos. En algunos casos, se utilizaron *softwares* propios de las oficinas de estadísticas de los países. El Banco Mundial recomendó que se empleara el programa ICP KIT, que es un *software* especialmente diseñado para el procesamiento de datos del PCI.

Mediante esas herramientas, se obtuvieron los precios promedio de cada producto, en cada uno de los países, en las diferentes recopilaciones de precios. Todos los países debían realizar una primera validación de los datos compilados, teniendo en cuenta unos atributos imprescindibles: fecha de recopilación, código de ciudad, código de establecimiento, cantidad, unidad de medida y precio. Con esa información, se estimaron posteriormente los indicadores que se analizaron para cada producto. Esos indicadores son los siguientes:

- Relación mínimo/máximo: para los valores en torno a ≥ 0,5, indica que no existe una gran dispersión en la información.
- Coeficiente de variación: se consideró como valor de aceptación un coeficiente ≤ 30%. Se revisaron todos los productos que tenían un coeficiente superior y, cuando el país confirmaba el valor, se requería la justificación.

De esta forma, cada país detectó sus valores extremos y los errores en la introducción de los datos. Este primer paso de validación se denomina validación *intra* país.

El segundo paso es la validación entre países. Este procedimiento lo realiza el coordinador regional una vez recibida la información de los países participantes. Para ello, se cuenta con herramientas tales como los cuadros Quaranta y Dikhanov. El objetivo de ambos cuadros es evaluar los precios promedio nacionales, con el fin de detectar posibles errores mediante la comparación de los precios promedio del mismo producto en los distintos países. Los posibles errores se marcan con diversos indicadores (véase más información en el anexo A8).

El cuadro Quaranta permite detectar una serie de problemas relacionados con la calidad de los datos, incluidos los siguientes:

- alta variación de precios para un producto dado dentro de cada país;
- alta variación de precios para un producto dado en el grupo de países analizados;
- alta variación de los productos que componen un EB para un país dado;
- precio promedio “nominal” extremo (alto o bajo) en ciertos países al comparar todos los países entre sí, convirtiendo los precios mediante el tipo de cambio de mercado;
- precio promedio “real” extremo (alto o bajo) para ciertos países al comparar todos los países entre sí, convirtiendo los precios con la PPA, y
- precio promedio de algunos productos que no siguen el patrón de comportamiento observado en general en ese país en relación con los demás (por ejemplo, cuando los precios de todos los productos de un EB para un país están entre un 15% y un 25% por debajo del promedio de todos los países, pero un producto es un 30% más caro que el precio promedio regional).

El cuadro Dikhanov está compuesto por un conjunto de tablas que se pueden emplear para validar las PPA a nivel agregado y a nivel de EB. Se usa, junto con el cuadro Quaranta, para diagnosticar posibles problemas en relación con los datos. La principal diferencia entre ambos cuadros radica en que, en el cuadro Dikhanov, no se analizan los productos agrupados según el EB, sino que se estudian de forma individual y simultáneamente. Ello facilita el análisis de aquellos productos que son los únicos representantes de un EB, o de los casos en los que un EB está compuesto por pocos productos.

Existe una tercera instancia de validación de datos: la validación a nivel mundial. Cada coordinador regional envía los datos de la validación entre países a la Oficina Mundial para que realice la validación de todas las regiones en su conjunto. La Oficina Mundial utiliza las mismas herramientas que emplean las regiones, pero incorpora la información de todos los países participantes. Ello permite detectar valores extremos en alguna región en particular y proceder a la corrección de los datos.

4. Las ponderaciones

Cada país que participa en el PCI debe proporcionar una estimación del PIB por el lado del gasto, desagregado en los 155 encabezados básicos requeridos. Aunque en algunos países se realiza el cálculo del PIB por el lado del gasto, en otros, se calcula únicamente por el lado de la producción. Los coordinadores regionales, junto con la Oficina Mundial, brindan asistencia técnica para asesorar a los países acerca de cómo realizar una estimación aproximada, a fin de poder contar con la información requerida en el PCI.

En la ronda de 2011 del PCI, se introdujo una herramienta para realizar la validación de la información sobre las ponderaciones proveniente de las oficinas de cuentas nacionales de los países participantes: el modelo de informe sobre las estadísticas del gasto, denominado MORES (Model Report on Expenditure Statistics). El MORES permite introducir los valores detallados del gasto para cada uno de los EB, así como información sobre los diferentes indicadores empleados para estimar los valores del gasto. Tiene siete planillas en formato Excel, donde se solicita la siguiente información: los valores estimados iniciales del gasto; información sobre los diferentes enfoques de partición para cada EB y para todos los indicadores relacionados con los datos de las cuentas nacionales, y el valor del gasto estimado para el último año disponible, o para 2011.

En esas tablas, el país debe explicitar el método de cálculo empleado para cada encabezado, especificando cuál de los siguientes cinco enfoques se utilizó: estimación directa; extrapolación; préstamos por valor/habitante o valor/volumen; préstamos de estructura, u opinión de expertos.

Una vez reunida la información sobre las ponderaciones, los coordinadores regionales analizaron la consistencia de los datos, tanto a nivel *intra* país como entre países. En la validación *intra* país, fue fundamental verificar la aditividad de los componentes del PIB, sus signos y la cobertura de los EB. La validación entre países consistió en realizar comparaciones de las estructuras y los niveles de consumo per cápita entre los países, a fin de detectar valores extremos o grandes diferencias dentro de grupos de países homogéneos. Los consumos per cápita se compararon en una misma moneda, y también mediante una estimación de las medidas de volumen implícitas, empleando el cociente de gasto de las cuentas nacionales y los precios promedios de cada EB.

5. Otros componentes del producto interno bruto

Por el lado del gasto, se debe estimar también el gasto del consumo del gobierno (individual y colectivo), el gasto de las instituciones sin fines de lucro que prestan servicios a los hogares, la formación bruta de capital fijo (maquinaria y equipo, y construcciones) y las exportaciones e importaciones de bienes y servicios. En el marco del PCI, se realizaron una serie de encuestas especiales que proporcionaron la información de base para la estimación de estos otros componentes, que también permitieron reforzar algunos componentes del consumo de los hogares: encuesta de educación privada; encuesta de alquileres; encuesta de construcciones; encuesta de maquinaria y equipo, y encuesta de gobierno.

Se definió una canasta de productos para cada encuesta, con sus especificaciones, se dieron instrucciones respecto de la validación *intra* país y, una vez realizado ese paso, se realizó la validación entre países, con las mismas herramientas que se utilizaron para los EB del componente de gasto de consumo de los hogares. Cabe señalar que cada coordinador regional tenía la facultad de adaptar las listas de productos proporcionadas por la Oficina Mundial a la realidad de cada región.

En el caso de la encuesta de educación privada, se definieron siete productos con sus especificaciones, de acuerdo con la Clasificación Internacional Normalizada de la Educación[3] de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO): escuela primaria, escuela secundaria (nivel inferior), escuela secundaria (nivel superior), educación terciaria (título en ciencias computacionales), educación terciaria (título en humanidades o ciencias sociales), otros programas de educación (cursos o instrucción en idiomas extranjeros) y otros programas educativos (instrucción privada en matemáticas-enseñanza extracurricular). También se solicitó para el análisis el calendario escolar de cada país.

En la encuesta de alquileres, la Oficina Mundial definió 64 tipos de vivienda, de los que se debía recoger el precio de los alquileres anuales en moneda nacional. Las especificaciones incluían información sobre el tipo de vivienda (villa/casa unifamiliar, casa semiseparada, apartamento o estudio, apartamento de una habitación, apartamento de dos habitaciones, viviendas tradicionales), si contaba con agua, electricidad, cocina y cuarto de baño dentro de la vivienda, si la vivienda tenía aire acondicionado, la antigüedad de la estructura y el tamaño de la vivienda. Además, se solicitó información respecto de la ubicación (urbana o rural).

En la encuesta de construcciones, se analizó una estructura con tres EB: construcción residencial, construcción no residencial y obra civil. El formulario proporcionado para este fin incluía lo siguiente:

---
[3] http://unesdoc.unesco.org/images/0014/001470/147002s.pdf.

- Materiales: se examinan 37 materiales que pueden ser usados indistintamente en los tres tipos de construcción analizados.
- Alquiler de equipamiento: se incluyen cinco equipamientos para alquilar, con chofer y sin él; en este caso, se especifica claramente el tipo de maquinaria que se debe examinar.
- Mano de obra: se solicita la remuneración por hora de siete tipos de actividades que se realizan en la construcción, y que se indique si ello incluye o no la seguridad social.
- Participaciones: en cada tipo de construcción, se debe indicar cuál es la participación de cada componente mencionado anteriormente en la estructura de costos. Además, se solicitan los márgenes de utilidad de los contratistas y los honorarios profesionales.

En la encuesta de maquinaria y equipo, la Oficina Mundial proporcionó una lista de 177 productos, organizados en un catálogo de especificaciones y fotos. Sobre la base de esa lista, cada coordinador regional tuvo que verificar la existencia de los productos y adaptar la lista a la región.

En la encuesta de gobierno, la información solicitada consistió en las remuneraciones de 44 ocupaciones previamente definidas por la Oficina Mundial, junto con datos de las cuentas nacionales, en particular, las cuentas de producción de los sectores de la administración, la salud y la educación públicas, así como los datos agregados globales de cada país. Las ocupaciones requeridas se agruparon en tres EB: salud, educación y servicios colectivos. En cada tipo de ocupación, se solicitó información sobre cuatro niveles de antigüedad (nivel inicial, 5 años, 10 años y 20 años de antigüedad). En los países donde existe más de un nivel de gobierno (nacional, provincial, estatal, municipal u otros), se solicitó que se registraran e indicaran las remuneraciones según el nivel de gobierno.

Para aquellos EB donde era muy costoso realizar una encuesta especial, se utilizaron paridades de referencia. Dichas paridades se clasifican en tres categorías: i) paridades de referencia basadas en los precios (específicas o neutrales); ii) basadas en el volumen, y iii) basadas en el tipo de cambio (oficial) de mercado.

La Oficina Mundial dio directrices para un total de 42 encabezados básicos. Información detallada de cada uno de ellos se puede consultar en el anexo A8.

G. Resultados de la ronda de 2011 del Programa de Comparación Internacional

En América Latina y el Caribe, la coordinación regional de la ronda de 2011 del PCI estuvo a cargo de la CEPAL. Los países de América Latina participantes fueron: Bolivia (Estado Plurinacional de), Brasil, Colombia, Costa Rica, Ecuador, El Salvador, Guatemala, Haití, Honduras, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, República Dominicana, Uruguay y Venezuela (República Bolivariana de).

Los países y territorios del Caribe que participaron fueron: Anguila, Antigua y Barbuda, Aruba, Bahamas, Barbados, Belice, Bermudas, Bonaire, Curaçao, Dominica, Granada, Islas Caimán, Islas Turcas y Caicos, Islas Vírgenes Británicas, Jamaica, Montserrat, Saint Kitts y Nevis, San Martín, San Vicente y las Granadinas, Santa Lucía, Suriname y Trinidad y Tabago. En esta ronda, Chile y México formaron parte de la región de la OCDE, la Argentina se abstuvo de participar y Cuba participó directamente con la Oficina Mundial.

Se presentan a continuación los principales resultados de la ronda de 2011, mediante un conjunto de indicadores pertinentes para el análisis:

- PIB real: este indicador se obtiene dividiendo el PIB nominal, en moneda nacional, por las PPA estimadas; da cuenta del tamaño real de la economía del país y permite hacer las comparaciones de volumen.
- PIB real per cápita: es el PIB real dividido por la población; es un indicador indirecto del bienestar de la población.
- Índice del nivel de precios: es el cociente entre la PPA y el tipo de cambio de mercado de cada país; con este indicador, se puede analizar el nivel de precios de un país respecto del promedio regional, por lo que aporta conocimientos sobre cuán caro o barato es el país en relación con el promedio de la región.

Para poder realizar la comparación en todo el continente, se incluyeron los datos de Chile y México, obtenidos de la región de la OCDE. Si se toman los indicadores del PIB real para la región en su conjunto, las economías más grandes de América Latina y el Caribe eran el Brasil y México, seguidas por Colombia y la República Bolivariana de Venezuela. En el otro extremo se encontraban economías como Anguila y Montserrat. En lo que respecta al PIB real per cápita, en el Caribe, los países que gozaban de un mayor bienestar según este indicador eran las Bermudas y las Islas Caimán y, en América Latina, Chile y el Uruguay. En el extremo opuesto se encontraban el Estado Plurinacional de Bolivia, Honduras, Nicaragua y Haití.

Si se analiza el índice del nivel de precios de la región, tomando como referencia el promedio mundial, se observa que los países y territorios del Caribe tienen altos niveles de precios, como sucede en las Bermudas, las Islas Turcas y Caicos, las Islas Vírgenes Británicas y Barbados. Entre los países que tienen niveles de precios más bajos están Haití, Guatemala, el Estado Plurinacional de Bolivia y Nicaragua. El Uruguay, San Martín y Anguila tienen niveles de precios cercanos al promedio mundial.

En cuanto al componente de gastos de consumo individual de los hogares, el Brasil y México tienen los niveles más altos en términos de PPA. Las economías de menor nivel de consumo son Bonaire y Montserrat. En lo que se refiere al consumo real per cápita, las economías que tienen un nivel de consumo más elevado son las Bermudas y las Islas Caimán, y en el extremo opuesto se hallan Honduras, Nicaragua y Haití. En lo que respecta al índice del nivel de precios del consumo, los niveles más altos corresponden a las Bermudas y las Islas Turcas y Caicos y, los niveles más bajos, a Haití, Guatemala, el Estado Plurinacional de Bolivia y Nicaragua. En los cuadros IV.3 y IV.4 se resumen los resultados.

■ Cuadro IV.3

América Latina y el Caribe y países seleccionados de la Organización de Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE): gasto de consumo individual de los hogares, según el Programa de Comparación Internacional, ronda de 2011[a]

	Gasto de consumo individual de los hogares / Economías		Gasto *(en miles de millones de dólares)*		Gasto per cápita *(en dólares)*		Índice del nivel de precios (mundo = 100)	Índices del gasto per cápita				Participaciones (mundo = 100)			Datos de referencia			
								Mundo = 100		Estados Unidos = 100		Gasto		Población	PPA (dólar = 1,000)	Tipo de cambio (dólar = 1,000)	Población *(en millones de personas)*	Gasto en moneda nacional *(en miles de millones)*
			Basado en la PPA[b]	Basado en el XR[c]	Basado en la PPA	Basado en el XR		Basado en la PPA	Basado en el XR	Basado en la PPA	Basado en el XR	Basado en la PPA	Basado en el XR					
OCDE	Chile	CHL	190,0	153,8	11 002	8 909	96,6	154,0	148,8	32,0	26,0	0,4	0,4	0,3	391 644	483 668	17,27	74 405,2
	México	MEX	1 078,4	776,0	9 322	6 708	85,8	130,5	112,0	27,2	19,5	2,2	1,9	1,7	8 940	12 423	115,68	9 640,8
	Estados Unidos	USA	10 711,8	10 711,8	34 329	34 329	119,3	480,5	573,2	100,0	100,0	22,3	26,6	4,6	1 000	1 000	312,04	10 711,8
América Latina	Bolivia (Estado Plurinacional de)	BOL	34,9	14,6	3 436	1 439	50,0	48,1	24,0	10,0	4,2	0,1	0,0	0,2	2 906	6 937	10,15	101,3
	Brasil	BRA	1 506,8	1 494,2	7,833	7,767	118,3	109,6	129,7	22,8	22,6	3,1	3,7	2,9	1 659	1 673	192,38	2 499,5
	Colombia	COL	318,6	206,3	6 765	4 381	77,3	94,7	73,2	19,7	12,8	0,7	0,5	0,7	1 196 955	1 848 139	47,09	381 323,0
	Costa Rica	CRI	39,4	26,8	8 586	5 838	81,1	120,2	97,5	25,0	17,0	0,1	0,1	0,1	343 786	505 664	4,59	13 555,4
	Cuba	CUB	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	0 292	...	11,17	...
	Ecuador	ECU	89,0	48,7	5 832	3 192	65,3	81,6	53,3	17,0	9,3	0,2	0,1	0,2	0 547	1 000	15,27	48,7
	El Salvador	SLV	40,7	21,6	6 503	3 452	63,3	91,0	57,6	18,9	10,1	0,1	0,1	0,1	0 531	1 000	6,25	21,6
	Guatemala	GTM	81,7	40,7	5 565	2 769	59,3	77,9	46,2	16,2	8,1	0,2	0,1	0,2	3 873	7 785	14,69	316,6
	Haití	HTI	16,1	8,2	1 612	823	61,0	22,6	13,7	4,7	2,4	0,0	0,0	0,1	20 706	40 523	10,01	334,0
	Honduras	HND	25,8	13,8	3 321	1 772	63,6	46,5	29,6	9,7	5,2	0,1	0,0	0,1	10 080	18 895	7,77	260,1
	Nicaragua	NIC	18,3	7,5	3 113	1 272	48,7	43,6	21,2	9,1	3,7	0,0	0,0	0,1	9 160	22 424	5,89	168,1
	Panamá	PAN	34,1	18,9	9 154	5 066	66,0	128,1	84,6	26,7	14,8	0,1	0,0	0,1	0 553	1 000	3,72	18,9
	Paraguay	PRY	31,9	17,7	4 862	2 689	66,0	68,1	44,9	14,2	7,8	0,1	0,0	0,1	2 309 430	4 176 066	6,57	73 739,5
	Perú	PER	188,7	107,5	6 332	3 606	67,9	88,6	60,2	18,4	10,5	0,4	0,3	0,4	1 569	2 754	29,80	296,0
	Uruguay	URY	37,1	31,5	10 962	9 321	101,4	153,4	155,6	31,9	27,2	0,1	0,1	0,1	16 424	19 314	3,38	609,2
	República Dominicana	DOM	88,4	48,1	8 810	4 795	64,9	123,3	80,1	25,7	14,0	0,2	0,1	0,1	20 741	38 109	10,04	1 833,7
	Venezuela (República Bolivariana de)	VEN	256,9	174,6	8 710	5 919	81,1	121,9	98,8	25,4	17,2	0,5	0,4	0,4	2 915	4 289	29,49	748,8
	Total	17	2 808,5	2 280,6	7 073	5 743	96,9	99,0	95,9	20,6	16,7	5,8	5,7	5,9	...	...	397,09	...

Cuadro IV.3 (conclusión)

Gasto de consumo individual de los hogares			Gasto (en miles de millones de dólares)		Gasto per cápita (en dólares)		Índice del nivel de precios (mundo = 100)	Índices del gasto per cápita				Participaciones (mundo = 100)			Datos de referencia			
								Mundo = 100		Estados Unidos = 100		Gasto		Población	PPA (dólar = 1,000)	Tipo de cambio (dólar = 1,000)	Población (en millones de personas)	Gasto en moneda nacional (en miles de millones)
	Economías		Basado en la PPA[b]	Basado en el XR[c]	Basado en la PPA	Basado en el XR		Basado en la PPA	Basado en el XR	Basado en la PPA	Basado en el XR	Basado en la PPA	Basado en el XR					
El Caribe	Anguila	AIA	0,3	0,2	18 416	17 674	114,5	257,8	295,1	53,6	51,5	0,0	0,0	0,0	2 591	2 700	0,01	0,7
	Antigua y Barbuda	ATG	0,8	0,7	9 708	7 910	97,2	135,9	132,1	28,3	23,0	0,0	0,0	0,0	2 200	2 700	0,09	1,8
	Aruba	ABW	1,7	1,6	17 040	15 734	110,1	238,5	262,7	49,6	45,8	0,0	0,0	0,0	1 653	1 790	0,10	2,9
	Bahamas	BHS	4,9	5,6	13 249	15 248	137,3	185,5	254,6	38,6	44,4	0,0	0,0	0,0	1 151	1 000	0,37	5,6
	Barbados	BRB	2,9	3,6	10 453	12 611	143,9	146,3	210,6	30,4	36,7	0,0	0,0	0,0	2 413	2 000	0,28	7,1
	Belice	BLZ	1,8	1,1	5 718	3 381	70,5	80,0	56,5	16,7	9,8	0,0	0,0	0,0	1 183	2 000	0,32	2,1
	Bermudas	BMU	2,0	3,7	30 343	57 654	226,7	424,7	962,7	88,4	167,9	0,0	0,0	0,0	1 900	1 000	0,06	3,7
	Bonaire	BON	0,2	0,2	12 119	11 141	109,7	169,6	186,0	35,3	32,5	...	...	...	0 919	1 000	0,02	0,2
	Curaçao	CUW	2,6	2,1	17 354	13 856	95,2	242,9	231,4	50,6	40,4	0,0	0,0	0,0	1 429	1 790	0,15	3,8
	Dominica	DMA	0,5	0,4	7 347	5 630	91,4	102,8	94,0	21,4	16,4	0,0	0,0	0,0	2 069	2 700	0,07	1,1
	Granada	GRD	0,9	0,7	8 603	6 665	92,4	120,4	111,3	25,1	19,4	0,0	0,0	0,0	2 092	2 700	0,11	1,9
	Islas Caimán	CYM	1,7	1,6	29 497	27 918	112,9	412,9	466,2	85,9	81,3	0,0	0,0	0,0	1 136	1 200	0,06	1,9
	Islas Turcas y Caicos	TCA	0,2	0,3	6 421	8 235	153,0	89,9	137,5	18,7	24,0	0,0	0,0	0,0	1 282	1 000	0,03	0,3
	Islas Vírgenes Británicas	VGB	0,3	0,3	9 147	11 436	149,1	128,0	191,0	26,6	33,3	0,0	0,0	0,0	1 250	1 000	0,03	0,3
	Jamaica	JAM	16,8	12,4	6 094	4 495	88,0	85,3	75,1	17,8	13,1	0,0	0,0	0,0	63 354	85 892	2,75	1 063,5
	Montserrat	MSR	0,1	0,0	10 589	9 161	103,2	148,2	153,0	30,8	26,7	0,0	0,0	0,0	2 336	2 700	0,01	0,1
	Saint Kitts y Nevis	KNA	0,6	0,5	11 441	9 409	98,1	160,2	157,1	33,3	27,4	0,0	0,0	0,0	2 221	2 700	0,05	1,3
	San Martín	SXM	0,6	0,6	16 375	15 346	111,8	229,2	256,3	47,7	44,7	0,0	0,0	0,0	1 678	1 790	0,04	1,0
	San Vicente y las Granadinas	VCT	0,7	0,6	6 727	5 081	90,1	94,2	84,8	19,6	14,8	0,0	0,0	0,0	2 039	2 700	0,11	1,5
	Santa Lucía	LCA	1,1	0,9	6 299	4 990	94,5	88,2	83,3	18,3	14,5	0,0	0,0	0,0	2 139	2 700	0,18	2,4
	Suriname	SUR	2,8	1,6	5 239	3 022	68,8	73,3	50,5	15,3	8,8	0,0	0,0	0,0	1 885	3 268	0,54	5,3
	Trinidad y Tabago	TTO	15,0	10,8	11 225	8 090	86,0	157,1	135,1	32,7	23,6	0,0	0,0	0,0	4 619	6 409	1,33	69,1
	Total	22	58,3	49,2	8 719	7 358	100,7	122,0	122,9	25,4	21,4	0,1	0,1	0,1	...	...	6,69	...

Fuente: Elaboración propia sobre la base de Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), "Resultados del Programa de Comparación Internacional (PCI) de 2011 para América Latina y el Caribe", *Cuadernos Estadísticos*, Nº 42 (LC/G.2630-P), Santiago, enero de 2015.

[a] En esta ronda, Chile y México formaron parte de la región de la OCDE.

[b] PPA: paridad del poder adquisitivo.

[c] XR: tipo de cambio.

■ Cuadro IV.4

América Latina y el Caribe y países seleccionados de la Organización de Cooperación y Desarrollo Económicos (OCDE): producto interno bruto, según el Programa de Comparación Internacional, ronda de 2011[a]

	Producto interno bruto / Economías		Gasto (en miles de millones de dólares)		Gasto per cápita (en dólares)		Índice del nivel de precios (mundo = 100)	Índices del gasto per cápita: Mundo = 100		Índices del gasto per cápita: Estados Unidos = 100		Participaciones (mundo = 100): Gasto		Participaciones (mundo = 100): Población	PPA (dólar = 1,000)	Datos de referencia: Tipo de cambio (dólar = 1,000)	Datos de referencia: Población (en millones)	Datos de referencia: Gasto en moneda nacional (en miles de millones)
			Basado en la PPA[b]	Basado en el XR[c]	Basado en la PPA	Basado en el XR		Basado en la PPA	Basado en el XR	Basado en la PPA	Basado en el XR	Basado en la PPA	Basado en el XR					
	(00)		(01)	(02)	(03)	(04)	(05)	(06)	(07)	(08)	(09)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
OCDE	Chile	CHL	349,1	251,2	20 216	14 546	92,8	150,2	139,4	40,6	29,2	0,4	0,4	0,3	348 017	483 668	17,27	121 492,7
	México	MEX	1 894,6	1 170,1	16 377	10 115	79,6	121,7	96,9	32,9	20,3	2,1	1,7	1,7	7 673	12 423	115,68	14 536,9
	Estados Unidos	USA	15 533,8	15 533,8	49 782	49 782	129,0	369,8	476,9	100,0	100,0	17,1	22,1	4,6	1 000	1 000	312,04	15 533,8
América Latina	Bolivia (Estado Plurinacional de)	BOL	56,4	23,9	5 557	2 360	54,8	41,3	22,6	11,2	4,7	0,1	0,0	0,2	2 946	6 937	10,15	166,1
	Brasil	BRA	2 816,3	2 476,6	14 639	12 874	113,4	108,8	123,3	29,4	25,9	3,1	3,5	2,9	1 471	1 673	192,38	4 143,0
	Colombia	COL	535,0	336,3	11 360	7 142	81,1	84,4	68,4	22,8	14,3	0,6	0,5	0,7	1 161 910	1 848 139	47,09	621 615,0
	Costa Rica	CRI	59,8	41,0	13 030	8 935	88,4	96,8	85,6	26,2	17,9	0,1	0,1	0,1	346 738	505 664	4,59	20 748,0
	Cuba	CUB	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	0 322	…	11,17	…
	República Dominicana	DOM	109,0	55,6	10 858	5 541	65,8	80,7	53,1	21,8	11,1	0,1	0,1	0,1	19 449	38 109	10,04	2,119,3
	Ecuador	ECU	151,6	79,8	9 932	5 226	67,9	73,8	50,1	20,0	10,5	0,2	0,1	0,2	0 526	1 000	15,27	79,8
	El Salvador	SLV	46,0	23,1	7 357	3 701	64,9	54,7	35,5	14,8	7,4	0,1	0,0	0,1	0 503	1 000	6,25	23,1
	Guatemala	GTM	102,4	47,7	6 971	3 247	60,1	51,8	31,1	14,0	6,5	0,1	0,1	0,2	3 626	7 785	14,69	371,3
	Haití	HTI	15,6	7,3	1 557	734	60,8	11,6	7,0	3,1	1,5	0,0	0,0	0,1	19 108	40 523	10,01	297,7
	Honduras	HND	33,8	17,7	4 349	2 282	67,7	32,3	21,9	8,7	4,6	0,0	0,0	0,1	9 915	18 895	7,77	335,0
	Nicaragua	NIC	24,2	9,6	4 111	1 635	51,3	30,5	15,7	8,3	3,3	0,0	0,0	0,1	8 919	22 424	5,89	216,1
	Panamá	PAN	57,2	31,3	15 369	8 411	70,6	114,2	80,6	30,9	16,9	0,1	0,0	0,1	0 547	1 000	3,72	31,3
	Paraguay	PRY	47,2	25,2	7 193	3 836	68,8	53,4	36,8	14,4	7,7	0,1	0,0	0,1	2 227 340	4 176 066	6,57	105 203,2
	Perú	PER	327,2	180,7	10 981	6 066	71,2	81,6	58,1	22,1	12,2	0,4	0,3	0,4	1 521	2 754	29,80	497,8
	Uruguay	URY	58,7	46,4	17 343	13 722	102,0	128,8	131,5	34,8	27,6	0,1	0,1	0,1	15 282	19 314	3,38	896,8
	Venezuela (República Bolivariana de)	VEN	500,3	316,5	16 965	10 731	81,6	126,0	102,8	34,1	21,6	0,6	0,5	0,4	2 713	4 289	29,49	1 357,5
	Total	17	4 940,8	3 719,1	12 443	9 366	97,1	92,4	89,7	25,0	18,8	5,5	5,3	5,9	…	…	397,09	…

Cuadro IV.4 (conclusión)

Producto interno bruto			Gasto (en miles de millones de dólares)		Gasto per cápita (en dólares)		Índice del nivel de precios (mundo = 100)	Índices del gasto per cápita				Participaciones (mundo = 100)			PPA (dólar = 1,000)	Datos de referencia		
								Mundo = 100		Estados Unidos = 100		Gasto		Población		Tipo de cambio (dólar = 1,000)	Población (en millones)	Gasto en moneda nacional (en miles de millones)
Economías			Basado en la PPA[b]	Basado en el XR[c]	Basado en la PPA	Basado en el XR		Basado en la PPA	Basado en el XR	Basado en la PPA	Basado en el XR	Basado en la PPA	Basado en el XR					
El Caribe	Anguila	AIA	0,4	0,3	27 274	20 982	99,2	202,6	201,0	54,8	42,1	0,0	0,0	0,0	2 077	2 700	0,01	0,8
	Antigua y Barbuda	ATG	1,8	1,1	20 540	13 172	82,7	152,6	126,2	41,3	26,5	0,0	0,0	0,0	1 731	2 700	0,09	3,0
	Aruba	ABW	3,7	2,6	36 017	25 355	90,8	267,6	242,9	72,3	50,9	0,0	0,0	0,0	1 260	1 790	0,10	4,6
	Bahamas	BHS	8,3	7,9	22 639	21 490	122,4	168,2	205,9	45,5	43,2	0,0	0,0	0,0	0 949	1 000	0,37	7,9
	Barbados	BRB	4,3	4,4	15 354	15 483	130,0	114,1	148,3	30,8	31,1	0,0	0,0	0,0	2 017	2 000	0,28	8,7
	Belice	BLZ	2,6	1,5	8 212	4 721	74,1	61,0	45,2	16,5	9,5	0,0	0,0	0,0	1 150	2 000	0,32	3,0
	Bermudas	BMU	3,6	5,6	54 899	85 839	201,6	407,9	822,4	110,3	172,4	0,0	0,0	0,0	1 564	1 000	0,06	5,6
	Bonaire	BON	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	Curaçao	CUW	4,2	3,0	27 781	20 055	93,1	206,4	192,1	55,8	40,3	0,0	0,0	0,0	1 292	1 790	0,15	5,4
	Dominica	DMA	0,7	0,5	9 983	6 881	88,9	74,2	65,9	20,1	13,8	0,0	0,0	0,0	1 861	2 700	0,07	1,3
	Granada	GRD	1,2	0,8	11 221	7 410	85,2	83,4	71,0	22,5	14,9	0,0	0,0	0,0	1 783	2 700	0,11	2,1
	Islas Caimán	CYM	2,8	2,2	49 686	39 699	103,0	369,1	380,3	99,8	79,7	0,0	0,0	0,0	0 959	1 200	0,06	2,7
	Islas Turcas y Caicos	TCA	0,7	0,7	20 878	22 971	141,9	155,1	220,1	41,9	46,1	0,0	0,0	0,0	1 100	1 000	0,03	0,7
	Islas Vírgenes Británicas	VGB	0,9	0,9	30 290	32 580	138,7	225,0	312,1	60,8	65,4	0,0	0,0	0,0	1 076	1 000	0,03	0,9
	Jamaica	JAM	22,9	14,5	8 329	5 248	81,3	61,9	50,3	16,7	10,5	0,0	0,0	0,0	54 122	85 892	2,75	1 241,8
	Montserrat	MSR	0,1	0,1	15 762	11 343	92,8	117,1	108,7	31,7	22,8	0,0	0,0	0,0	1 943	2 700	0,01	0,2
	Saint Kitts y Nevis	KNA	1,1	0,7	20 582	13 744	86,1	152,9	131,7	41,3	27,6	0,0	0,0	0,0	1 803	2 700	0,05	2,0
	San Martín	SXM	1,2	1,0	32 972	25 402	99,3	245,0	243,4	66,2	51,0	0,0	0,0	0,0	1 379	1 790	0,04	1,7
	San Vicente y las Granadinas	VCT	1,1	0,7	9 883	6 191	80,8	73,4	59,3	19,9	12,4	0,0	0,0	0,0	1 691	2 700	0,11	1,8
	Santa Lucía	LCA	1,8	1,2	9 893	6 755	88,1	73,5	64,7	19,9	13,6	0,0	0,0	0,0	1 844	2 700	0,18	3,3
	Suriname	SUR	7,8	4,4	14 463	8 082	72,1	107,4	77,4	29,1	16,2	0,0	0,0	0,0	1 826	3 268	0,54	14,3
	Trinidad y Tabago	TTO	38,3	23,5	28 743	17 660	79,2	213,5	169,2	57,7	35,5	0,0	0,0	0,0	3 938	6 409	1,33	150,9
	Total	22	109,3	77,5	16 351	11 586	91,4	121,5	111,0	32,8	23,3	0,1	0,1	0,1	...	...	6,69	...

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), "Resultados del Programa de Comparación Internacional (PCI) de 2011 para América Latina y el Caribe", *Cuadernos Estadísticos*, Nº 42 (LC/G.2630-P), Santiago, enero de 2015.

[a] En esta ronda, Chile y México formaron parte de la región de la OCDE.

[b] PPA: paridad del poder adquisitivo.

[c] XR: tipo de cambio.

Bibliografía

Archibald, R. B. (1977), "On the theory of industrial price measurement: output price indexes", *Annals of Economic and Social Measurement*, Nº 6, National Bureau of Economic Research (NBER).

Banco Mundial (2015), *Purchasing Power Parities and the Real Size of the World Economies: A Comprehensive Report of the 2011 International Comparison Program*, Washington, D.C. [en línea] http://siteresources.worldbank.org/ICPEXT/Resources/2011-ICP-Global-Report.pdf.

___(2013), *Measuring the Real Size of the World Economy: The Framework, Methodology, and Results of the International Comparison Program-ICP*, Washington, D.C. [en línea] https://openknowledge.worldbank.org/bitstream/handle/10986/13329/9780821397282.pdf?sequence=5.

___(2008), "Global purchasing power parities and real expenditures: 2005 International Comparison Program", *Documento de Trabajo*, Nº 45196, Washington, D.C. [en línea] http://documentos.bancomundial.org/curated/es/842221468166145357/pdf/451960REPLACEM0me0box0info00PUBLIC0.pdf.

Bentham, J. (1789), *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*, Londres, T. Payne and Son.

Bloem, A., R. Dippelsman y N. Maehle (2001), *Manual de cuentas nacionales trimestrales: conceptos, fuentes de datos y compilación*, Washington D.C., Fondo Monetario Internacional (FMI) [en línea] http://www.imf.org/external/pubs/ft/qna/2000/textbook/spa/text.pdf.

Cage, R., J. Greenlees y P. Jackman (2003), "Introducing the chained consumer price index", documento presentado en la Séptima Reunión del Grupo de Ottawa sobre los Índices de Precios, París, 27 a 29 de mayo [en línea] https://www.bls.gov/cpi/additional-resources/chained-cpi-introduction.pdf.

Carli, G. (1764), "Del valore e della proporzione de 'metalli monetati", G. G. Destefanis, *Scrittori classici italiani di economia politica,* vol. 13, Milán.

CEPAL (Comisión Económica para América Latina y el Caribe) (2016), "Programa de Comparación Internacional Ronda 2011: documento metodológico", *Documentos de Proyecto* (LC/W.699), Santiago [en línea] http://www.cepal.org/es/publicaciones/40358-programa-comparacion-internacional-ronda-2011-documento-metodologico.

Christensen, L., D. Jorgenson y L. Lau (1975), "Transcendental Logarithmic Utility Functions", *The American Economic Review*, vol. 65, Nº 3, American Economic Association [en línea] http://www.jstor.org/stable/1804840.

Comisión de las Comunidades Europeas y otros (1993), *Sistema de Cuentas Nacionales 1993*, Bruselas/Luxemburgo/Nueva York/París/Washington, D.C. [en línea] http://comuna.cat/-/sctasnac93.pdf.

Comisión Europea y otros (2008), *Sistema de Cuentas Nacionales 2008*, Bruselas/Luxemburgo/Nueva York/París/Washington, D.C. [en línea] https://unstats.un.org/unsd/nationalaccount/docs/SNA2008Spanish.pdf.

Coremberg, A. (ed.) (2015), *Progresos en medición de la economía*, Asociación Argentina de Economía Política, Buenos Aires [en línea] http://www.aaep.org.ar/publicaciones/download/medicion_economia.pdf.

Cournot, A. A. (1841), *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, París, L. Hachette.

Delfino, J. A. (2002), "Introducción a la teoría económica de los números índices", *Documentos de Trabajo*, Nº 14, Córdoba, Universidad Nacional de Córdoba.

Diewert, W. E. (2010), "Understanding PPPs and PPP-based national accounts: comment", *American Economic Journal: Macroeconomics*, American Economic Association.

___(2005), "Progress in service sector productivity measurement: review article on 'Productivity in the U.S. services sector: new sources of economic growth'", *International Productivity Monitor*, Centre for the Study of Living Standards, vol. 11.

___(2004), "On the stochastic approach to linking the regions in the ICP", *Discussion Paper*, Nº 04-16, Vancouver, Universidad de Columbia Británica, Departamento de Economía.

___(1996), "Price and quantity measures," *Inflation Accounting: A Manual on National Accounting Under Conditions of High Inflation*, París, OECD Publishing.

___(1988), "The early history of price index research", *NBER Working Paper Series*, Nº 2713, Cambridge, National Bureau of Economic Research (NBER).

___(1976), "Exact and superlative index numbers", *Journal of Econometrics*, Nº 4, Ámsterdam, North-Holland Publishing Company [en línea] http://www.researchgate.net/publication/4856926_Exact_and_superlative_index_numbers.

___(1974), "Applications of duality theory", *Frontiers of Quantitative Economics*, vol. II, M. D. Intriligator y D. A. Kendrick (comps.), Ámsterdam, North-Holland Publishing Company.

Éltető, Ö. y P. Köves (1964), "Egy nemzetközi összehasonlításoknál fellépő indexszámítási problémáról", *Statisztikai Szemle*, vol. 42, Nº 5, Budapest, Oficina Central de Estadística de Hungría.

Epstein, H. y S. Marconi (2016), "Paridades de poder adquisitivo para América Latina y el Caribe, 2005-2013: métodos y resultados", *Revista CEPAL*, Nº 119 (LC/G.2683-P), Santiago, Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) [en línea] http://www.cepal.org/es/publicaciones/40391-paridades-poder-adquisitivo-america-latina-caribe-2005-2013-metodos-resultados.

___(2014), "América Latina y el Caribe: estimación de las series en paridades de poder adquisitivo (PPA): un ejercicio preliminar para el período 2000-2011", *serie Estudios Estadísticos*, Nº 85 (LC/L.3781), Santiago, Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) [en línea] http://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/35895/S2014047_es.pdf?sequence=1.

Erro Azcárate, L. y R. Olinto Ramos (2006), "Medidas de volumen recomendadas por el SCN 1993: aplicación de índices encadenados en América Latina. Informe final del Grupo de Trabajo", documento presentado en el Seminario Latinoamericano de Cuentas Nacionales, 2006, Ciudad de Guatemala, 23 a 25 de octubre [en línea] http://www.cepal.org/deype/noticias/noticias/3/26983/gt_erro_olinto.pdf.

Eurostat (Oficina de Estadística de la Unión Europea) (2000), "Manual de cuentas trimestrales", *serie Manuales*, Nº 9 (LC/L.1379-P), Santiago, Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) [en línea] http://repositorio.cepal.org/bitstream/handle/11362/5561/1/S0005464_es.pdf.

Fisher, F. M. y K. Shell (1972), "The pure theory of the national output deflator", *The Economic Theory of Price Indices: Two Essays on the Effects of Taste, Quality, and Technological Change*, Nueva York, Academic Press.

Fleetwood, W. (1707), *Chronicum Preciosum: Or, an Account of English Money, the Price of Corn and Other Commodities for the Last 600 Years*, Londres [en línea] https://archive.org/details/chroniconprecios00flee.

FMI (Fondo Monetario Internacional) (s/f), "Special Data Dissemination Standard", Cartelera Electrónica de Divulgación de Datos de los Países [en línea] http://dsbb.imf.org/Pages/SDDS/CountryList.aspx.

Gini, C. (1931), "On the circular test of index numbers", *Metron*, vol. 9, Roma, Instituto de Estadística.

___ (1924), "Quelques considérations au sujet de la construction des nombres indices des prix et des questions analogues", *Metron*, vol. 4, Roma, Instituto de Estadística.

Hill, R. J. y M. P. Timmer (2006), "Standard errors as weights in multilateral price indexes", *Journal of Business & Economic Statistics*, American Statistical Association, vol. 24, Nº 3, julio.

Jevons (1865), *The Coal Question: An Inquiry Concerning the Progress of the Nation, and the Probable Exhaustion of our Coal-Mines*, Londres, Macmillan and Co.

Johnson, D., S. Reed y K. Stewart (2006), "Price measurement in the United States: a decade after the Boskin Report", *Monthly Labor Review*, Oficina de Estadísticas Laborales, Washington, D.C., mayo [en línea] http://www.bls.gov/opub/mlr/2006/05/art2full.pdf.

Konüs, A. A. (1939), "The Problem of the True Index of the Cost of Living", *Econometrica*, vol. 7, Nº 1, The Econometric Society.

Kravis, I. B., A. Heston y R. Summers (1982), *World Product and Income: International Comparisons of Real Gross Product*, Baltimore, Oficina de Estadística de las Naciones Unidas/Banco Mundial, The Johns Hopkins University Press.

Laspeyres, E. (1871), "Die Berechnung einer mittleren Waarenpreissteigerung", *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, vol. 16, Lucius & Lucius Verlagsgesellschaft mbH.

Maletta, H. (1996), "Sustitución en el consumo, medición del costo de vida y tipo de cambio real en la Argentina, 1960-1995", Buenos Aires, inédito.

OCDE (Organización de Cooperación y Desarrollo Económicos) (s/f), "Main economic indicators" [en línea] http://stats.oecd.org/mei/default.asp?lang=e&subject=8.

Oficina Estadística del Japón (s/f), "Q&A about the consumer price index (answers)", Ministerio de Asuntos Internos y Comunicaciones [en línea] http://www.stat.go.jp/english/data/cpi/1585.htm.

OIT (Organización Internacional del Trabajo) y otros (2006), *Manual del índice de precios al consumidor: teoría y práctica*, Washington, D.C. [en línea] http://www.imf.org/external/pubs/ft/cpi/manual/2014/esl/cpi_sp.pdf.

Paasche, H. (1874), "Über die Preisentwicklung der letzten Jahre nach den Hamburger Borsennotirungen", *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, vol. 12, Lucius & Lucius Verlagsgesellschaft mbH.

Prasada Rao, D. S. (2009), "Generalised Éltetö-Köves-Szulc (EKS) and country-product-dummy (CPD) methods for international comparisons", *Purchasing Power Parities of Currencies: Recent Advances in Methods and Applications*, D. S. Prasada Rao (ed.), Cheltenham, Edward Elgar.

___(2005), "On the equivalence of weighted country-product-dummy (CPD) method and the Rao-system for multilateral price comparisons", *The Review of Income and Wealth*, serie 51, Nº 4, International Association for Research in Income and Wealth (IARIW), diciembre.

___(2004), "The country-product-dummy method: a stochastic approach to the computation of purchasing power parities in the ICP", *CEPA Working Papers Series*, WP032004, Escuela de Economía, Universidad de Queensland.

___(1990), "A system of log-change index numbers for multilateral comparisons", *Comparisons of Prices and Real Products in Latin America*, J. Salazar-Carrillo y D. S. Prasada Rao (eds.), Ámsterdam, North-Holland.

Prasada Rao, D. S. y M. P. Timmer (2003), "Purchasing power parities for industry comparisons using weighted Elteto-Koves-Szulc (EKS) methods", *The Review of Income and Wealth*, International Association for Research in Income and Wealth, vol. 49, Nº 4, diciembre.

Sachs, J. y F. Larraín (1994), *Macroeconomía en la economía global*, Ciudad de México, Prentice Hall.

Sergeev, S. (2003), "Equi-representativity and some modifications of the EKS Method at the basic heading level", documento presentado en la Consulta Conjunta CEPE/Eurostat/OCDE sobre el Programa de Comparación Europea, Ginebra, 31 de marzo a 2 de abril.

___(2002), "Calculation of equi-characteristic PPPs at the basic heading level (modification of the method of 'asterisks')", documento presentado en la reunión del Grupo de Trabajo sobre Paridad del Poder Adquisitivo de Eurostat, Luxemburgo, 12 y 13 de junio.

Summers, R. (1973), "International price comparisons based upon incomplete data", *The Review of Income and Wealth*, vol. 19, Nº 1, International Association for Research in Income and Wealth (IARIW).

Szulc, B. (1964), "Indices for multiregional comparisons", *Przeglad Statystyczny*, Nº 3.

Theil, H. (1967), *Economics and Information Theory*, Ámsterdam, North Holland.

Triplett, J. (2000), "Should the cost-of-living index provide the conceptual framework for a consumer price index?", Brookings Institution, Washington, D.C., noviembre [en línea] https://www.brookings.edu/wp-content/uploads/2016/06/20001130.pdf.

___(1992), "Economic Theory and BEA's Alternative Quantity and Price Indexes", *Survey of Current Business*, vol. 72, Nº 4, abril, Oficina de Análisis Económicos (BEA) [en línea] http://www.bea.gov/scb/account_articles/national/0492trip/maintext.htm.

Anexos

Anexo A1

Caso de ponderadores fijos en el tiempo

■ Cuadro A1.1
Precios y cantidades variables

Año	Precio del vino (P) *(en dólares)*	Cantidad de vino (Q) *(en litros)*	Valor del gasto en vino (V=P.Q)	Precio del pan (P) *(en dólares)*	Cantidad de pan (Q) *(en kg)*	Valor del gasto en pan V=P.Q	Gasto total *(en dólares)*
2013	20	1	20	20	1	20	40
2014	40	0,5	20	10	2	20	40

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A1.2
Índice de precios aritmético con ponderaciones, 2013

Año	Ponderador del vino: 2013	Ponderador del pan: 2013	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	125	25

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A1.3
Índice de precios aritmético con ponderaciones, 2014

Año	Ponderador del vino: 2014	Ponderador del pan: 2014	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	125	25

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A1.4
Índice de precios armónico con ponderaciones, 2013

Año	Ponderador del vino: 2013	Ponderador del pan: 2013	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	80	-20

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A1.5
Índice de precios armónico con ponderaciones, 2014

Año	Ponderador del vino: 2014	Ponderador del pan: 2014	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	80	-20

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A1.6
Índice de precios geométrico con ponderaciones, 2013

Año	Ponderador del vino: 2013	Ponderador del pan: 2013	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	100	0

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A1.7
Índice de precios geométrico con ponderaciones, 2014

Año	Ponderador del vino: 2014	Ponderador del pan: 2014	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	100	0

Fuente: Elaboración propia.

Anexo A2

Caso de ponderadores variables en el tiempo

■ Cuadro A2.1
Precios y cantidades variables

Año	Precio del vino (P) *(en dólares)*	Cantidad de vino (Q) *(en litros)*	Valor del gasto en vino (V=P.Q)	Precio del pan (P) *(en dólares)*	Cantidad de pan (Q) *(en kg)*	Valor del gasto en pan V=P.Q	Gasto total *(en dólares)*
2013	20	1	20	20	1	20	40
2014	40	0,7	28	10	2	20	48

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A2.2
Índice de precios aritmético con ponderaciones, 2013

Año	Ponderador del vino: 2013	Ponderador del pan: 2013	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	125	25

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A2.3
Índice de precios aritmético con ponderaciones, 2014

Año	Ponderador del vino: 2014	Ponderador del pan: 2014	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,58	0,42	100	100	100	-
2014	0,58	0,42	200	50	137,5	37,5

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A2.4
Índice de precios armónico con ponderaciones, 2013

Año	Ponderador del vino: 2013	Ponderador del pan: 2013	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	80	-20

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro A2.5

Índice de precios armónico con ponderaciones, 2014

Año	Ponderador del vino: 2014	Ponderador del pan: 2014	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,58	0,42	100	100	100	-
2014	0,58	0,42	200	50	88,89	-11,1

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro A2.6

Índice de precios geométrico con ponderaciones, 2013

Año	Ponderador del vino: 2013	Ponderador del pan: 2013	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,5	0,5	100	100	100	-
2014	0,5	0,5	200	50	100	0

Fuente: Elaboración propia.

Cuadro A2.7

Índice de precios geométrico con ponderaciones, 2014

Año	Ponderador del vino: 2014	Ponderador del pan: 2014	Índice de precios del vino (100=2013)	Índice de precios del pan (100=2013)	Índice de precios, media aritmética (100=2013)	Variación porcentual de la media aritmética
2013	0,58	0,42	100	100	100	-
2014	0,58	0,42	200	50	112,25	12,2

Fuente: Elaboración propia.

Anexo A3

Minimización de los costos a partir de una función de utilidad cuadrática

Etapa 1: minimización del costo a precios iniciales

Un consumidor representativo tiene unas preferencias explicitadas en la siguiente función de utilidad:

$$U = 4\left(Q_t^x\right)^2 \left(Q_t^y\right)^2$$

El consumidor, conocedor del precio de los bienes(P_0^x =10 y P_0^y =5), desea minimizar el costo necesario para alcanzar un nivel de utilidad de 100. Se trata de determinar la canasta de consumo y la cantidad de ingreso necesario para alcanzar el nivel de consumo buscado al menor costo posible.

Resolución

El primer paso consiste en explicitar las funciones pertinentes para la optimización, que son dos ecuaciones: la ecuación presupuestaria y la función lagrangiana.

La recta presupuestaria está dada por la ecuación siguiente:

$$I = P_t^x \cdot Q_t^x + P_t^y \cdot Q_t^y$$

Si se reemplazan los precios, se obtiene: $I = 10 \cdot Q_t^x + 5 \cdot Q_t^y$

A partir de este momento, se opera con la función lagrangiana:

$$L = P_0^x \cdot Q_0^x + P_0^y \cdot Q_0^y + \lambda \cdot \left[U^0 - u(Q_0^x; Q_0^y)\right]$$

$$L = 10 \cdot Q_0^x + 5 \cdot Q_0^y + \lambda \cdot \left[100 - 4\left(Q_0^x\right)^2 \left(Q_0^y\right)^2\right]$$

Las condiciones de primer orden establecen lo siguiente:

i) $$\frac{\partial L}{\partial x} = 10 - 8\lambda Q_0^x \left(Q_0^y\right)^2 = 0$$

ii) $$\frac{\partial L}{\partial y} = 5 - 8\lambda Q_0^y \left(Q_0^x\right)^2 = 0$$

iii) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 4\left(Q_0^x\right)^2 \left(Q_0^y\right)^2 = 0$$

Se despeja λ de las primeras dos ecuaciones:

i) $\lambda = \dfrac{5}{4Q_0^x\left(Q_0^y\right)^2}$

ii) $\lambda = \dfrac{5}{8Q_0^y\left(Q_0^x\right)^2}$

En consecuencia, la relación se transforma en:

$$\frac{5}{4Q_0^x\left(Q_0^y\right)^2} = \frac{5}{8Q_0^y\left(Q_0^x\right)^2} \Rightarrow 4Q_0^x\left(Q_0^y\right)^2 = 8Q_0^y\left(Q_0^x\right)^2 \Rightarrow Q_0^x = \frac{1}{2}Q_0^y$$

Si se reemplazan los términos en la ecuación iii), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 4\left(Q_0^x\right)^2\left(Q_0^y\right)^2 = 0 \Rightarrow 100 - 4\cdot(\frac{1}{2}Q_0^y)^2\cdot\left(Q_0^y\right)^2 = 0 \Rightarrow 100 - \cdot\left(Q_0^y\right)^4 = 0 \Rightarrow \boxed{Q_0^y = 3{,}16};\boxed{Q_0^x = 1{,}58}$$

Por lo tanto, la canasta de consumo óptima será (x=1,58; y=3,16). El costo mínimo necesario para alcanzar el nivel de utilidad de 100 se obtiene de reemplazar los valores de la canasta óptima en la ecuación presupuestaria:

$$I = 10\cdot Q_0^x + 5\cdot Q_0^y \Rightarrow I = 10\cdot 1{,}58 + 5\cdot 3{,}16 \Rightarrow I = 31{,}62$$

Finalmente, se comprueba el nivel de utilidad buscado, reemplazando la canasta óptima en la función de utilidad:

$$U = 4\left(Q_0^x\right)^2\left(Q_0^y\right)^2$$

$$U = 4(1{,}58)^2(3{,}16)^2 = 100$$

Etapa 2: minimización del costo a precios actualizados

Se supone ahora que los precios de los bienes se modificaron de la siguiente manera: el precio del bien *x* aumentó a P_1^x = 11, y el del bien *y* se mantiene en P_1^y = 5. ¿Cuál sería el costo necesario para mantener el nivel de utilidad inicial?

Se vuelve a plantear la función lagrangiana correspondiente:

$$L = P_1^x\cdot Q_1^x + P_1^y\cdot Q_1^y + \lambda\cdot\left[U^0 - u(Q_1^x;Q_1^y)\right]$$

$$L = 11\cdot Q_1^x + 5\cdot Q_1^y + \lambda\cdot\left[100 - 4\left(Q_1^x\right)^2\left(Q_1^y\right)^2\right]$$

En este caso, las condiciones de primer orden son:

$$\text{i) } \frac{\partial L}{\partial x} = 11 - 8\lambda Q_1^x \left(Q_1^y\right)^2 = 0$$

$$\text{ii) } \frac{\partial L}{\partial y} = 5 - 8\lambda Q_1^y \left(Q_1^x\right)^2 = 0$$

$$\text{iii) } \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 4\left(Q_1^x\right)^2 \left(Q_1^y\right)^2 = 0$$

Despejando λ de las dos primeras ecuaciones, se obtiene:

$$\text{i) } \lambda = \frac{11}{8Q_1^x \left(Q_1^y\right)^2}$$

$$\text{ii) } \lambda = \frac{5}{8Q_1^y \left(Q_1^x\right)^2}$$

En consecuencia, la relación se transforma en:

$$\frac{11}{8Q_1^x \left(Q_1^y\right)^2} = \frac{5}{8Q_1^y \left(Q_1^x\right)^2} \Rightarrow \frac{11}{Q_1^x \left(Q_1^y\right)^2} = \frac{5}{Q_1^y \left(Q_1^x\right)^2} \Rightarrow Q_1^y = \frac{11}{5} Q_1^x$$

Si se reemplazan los términos en la ecuación iii), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 100 - 4\left(Q_1^x\right)^2 \left(Q_1^y\right)^2 = 0 \Rightarrow 100 - 4 \cdot \left(Q_1^x\right)^2 \cdot (\frac{11}{5} Q_1^x)^2 = 0 \Rightarrow 100 - 4\left(Q_1^x\right)^2 \cdot \frac{121}{25} \cdot \left(Q_1^x\right)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{Q_1^y = 3,32}; \boxed{Q_1^x = 1,51}$$

Por lo tanto, la canasta de consumo óptima será (Q_1^x =1,51; Q_1^y y=3,32). El costo mínimo necesario para alcanzar el nivel de utilidad de 100 se obtiene de reemplazar los valores de la canasta óptima en la ecuación presupuestaria:

$$I = 11 \cdot Q_1^x + 5 \cdot Q_1^y \Rightarrow I = 11 \cdot 1,51 + 5 \cdot 3,32 \Rightarrow I = 33,17$$

Nuevamente, se comprueba el nivel de utilidad buscado, reemplazando en la función de utilidad las combinaciones de la canasta óptima:

$$U = 4\left(Q_1^x\right)^2 \left(Q_1^y\right)^2$$

$$U = 4(1,51)^2 (3,32)^2 = 100$$

Etapa 3: estimación del costo de vida

El verdadero índice del costo de vida del consumidor entre los períodos 0 y 1 es el cociente del gasto mínimo que permita mantener cierta utilidad constante ante los diferentes conjuntos de precios, es decir:

$$ICV_1 = C\left(U_0, P_1\right) \ / \ C\left(U_0, P_0\right)$$

Si se reemplazan los términos con los costos que se obtuvieron en las etapas 0 y 1, el resultado es el siguiente:

$$ICV_1 = 33{,}17 / \ 31{,}62$$

$$ICV_1 = 4{,}9\%$$

Anexo A4

Función de producción de elasticidad de sustitución constante: maximización de la producción, minimización de los costos e índices de precios

En este anexo se realiza un análisis completo de los procesos de maximización de la producción y minimización de los costos, y su vínculo con los índices de precios. Los pasos que se siguen se pueden aplicar a cualquier tipo de función de producción (teoría de la producción) o de utilidad (teoría del consumidor). En este caso, se aplicarán a una función de producción de elasticidad de sustitución constante.

1. Definición de la función

La función de elasticidad de sustitución constante se define como:

$$f(K, L) = Q = A * (\alpha * K^{-\rho} + \beta L^{-\rho})^{-\nu/\rho}$$

Donde:

K: factor capital

L: factor trabajo

Q: cantidades producidas

A: parámetro que refleja la tecnología

α: parámetro de proporción del factor *K* respecto del ingreso total

β: parámetro de proporción del factor L respecto del ingreso total ($\alpha + \beta = 1$)

ρ: parámetro que se vincula a la elasticidad parcial de sustitución σ_{KL} de Allen, donde $\rho = (\sigma\text{-}1) / \sigma$

ν: parámetro de economía de escala o de grado de homoteticidad de la función, de manera que $\nu = 1$ implica rendimientos a escala constantes (función homogénea de grado 1), $\nu < 1$ implica rendimientos a escala decrecientes (función homogénea de grado $n < 1$) y $\nu > 1$ implica rendimientos a escala crecientes (función homogénea de grado $n > 1$)

Sean los siguientes valores para la función de elasticidad de sustitución constante:

$$Q = 1 * (0{,}3\ K^{-0{,}17647} + 0{,}7\ L^{-0{,}17647})^{-(1/0{,}17647)}$$

Por lo tanto, A = 1, $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}7$ (se verifica que $\alpha + \beta = 1$), $\rho = 0{,}17647$ (por tanto, $\sigma_{KL} = 0{,}85$) y $\nu = 1$, de modo que se trata de una función de rendimientos constantes a escala y homogénea de grado 1.

La función de producción $Q = f(K,L)$ se denomina función de producción directa, ya que vincula de forma directa los factores productivos con las cantidades producidas de Q, e incluye de forma implícita la tecnología subyacente en el proceso productivo. Como se puede observar, los argumentos de la función Q constituyen los elementos que integran el valor agregado de la producción. Si se incluyen los consumos intermedios, la función Q abarcará también los productos utilizados como insumos en la producción.

2. Restricción presupuestaria

La restricción presupuestaria viene dada por la siguiente ecuación:

$$R = P_K . K + P_L . L$$

Donde:

R: restricción presupuestaria

pK: precio del factor capital

K: factor capital

pL: precio del factor trabajo

L: factor trabajo

Una vez que se dispone de la función de producción Q=f(K,L) y de la restricción presupuestaria R, se pueden realizar dos procesos de optimización: la maximización de la producción y la minimización de los costos. Ambos procesos permiten determinar la cantidad óptima de demanda de factores necesaria para maximizar la producción a un costo mínimo. El proceso de maximización de la producción se conoce con el nombre de análisis primal, y el proceso de minimización de los costos se denomina análisis dual. Al realizar ambos procesos, se verificará que las cantidades demandadas de factores coinciden, es decir, que se llegará al mismo resultado, ya sea maximizando la producción o minimizando los costos.

3. Maximización de la producción: función de producción directa e indirecta

El problema de la maximización de la producción (análisis primal) consiste en seleccionar las cantidades óptimas para la demanda de factores K y L, de modo que se obtenga un nivel de producción Q máximo, dado el vector de precios existente, P_K y P_L, y una determinada restricción presupuestaria R. De forma analítica, puede plantearse de la siguiente manera:

$$max\ Q(K,L), \text{ sujeto a } R=K.P_{K0}+L.P_{L0}$$

Donde:

$Q(K,L)$: función de producción Q

$R=K.P_{K0}+L.P_{L0}$: recta presupuestaria, que resulta de multiplicar las cantidades de los factores de producción, K y L, por los precios vigentes en el período P_{K0} y P_{L0}.

La solución al problema de la maximización de *Q(K,L)* requiere determinar las cantidades demandadas denominadas "marshallianas" u "ordinarias" (K_m y L_m). La solución matemática se halla mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Junto a las demandas marshallianas, se obtendrá también una ecuación que define la función de producción indirecta, $G(R,P_K,P_L)$, donde la cantidad producida ya no depende de las cantidades de los factores productivos, sino de la restricción presupuestaria y de los precios de los factores. Esta función maximiza la cantidad producida desde una perspectiva económica, teniendo en cuenta los costos. El productor demandará aquellas cantidades de factores que permitan maximizar la producción de Q, en función del presupuesto disponible y de los precios vigentes.

Dados los precios vigentes en el período 0, P_{K0} = 10 y P_{L0} = 5, y un presupuesto disponible de 1.178,4 dólares para pagar el costo de los factores, se desea determinar las cantidades de los factores (K_m y L_m) que permitan alcanzar el máximo de producción Q.

Es decir:

$$max\ Q_0=1\ .(0,3\ .K^{-0,17647}+0,7\ .L^{-0,17647})^{-\left(\frac{1}{0,17647}\right)}\text{, sujeto a } R=10.K+5.L=1.178,4$$

Si se aplican los multiplicadores de Lagrange γ, se obtiene:

$$\begin{aligned}\gamma(Q, K, L, \lambda) &= f(K,L) + \lambda\ .\ (R - pK\ .\ K + pL\ .\ L)\\ &= (\alpha\ K^{-\rho} + \beta\ L^{-\rho})^{-(\nu/\rho)} + \lambda\ .\ (R - pK\ .\ K + pL\ .\ L)\end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden establecen lo siguiente:

i) $\gamma_K = f_K - \lambda\ .\ pK = 0$, donde $f_K = \alpha\ K^{\rho-1}\ (\alpha\ K^{\rho} + \beta\ L^{\rho})^{(1-\rho/\rho)} - \lambda\ pK = 0$

ii) $\gamma_L = f_L - \lambda\ .\ pL = 0$, donde $f_L = \beta\ L^{\rho-1}\ (\alpha\ K^{\rho} + \beta\ L^{\rho})^{(1-\rho/\rho)} - \lambda\ pL = 0$

iii) $\gamma_\Lambda = I - pK\ .\ K - pL\ .\ L = 0$

De i) y ii) se obtiene:

iv) $pK / pL = f_K / f_L$

$pK / pL = f_K / f_L = (\alpha / \beta)\ .\ (L / K)^{(\rho - 1)}$

Si se despejan K y L:

v) $L = K * (pK \,.\, \beta/(pL \,.\, \alpha))^{(1/(\rho - 1))}$

$K = L * (pL \,.\, \alpha/(pK \,.\, \beta))^{(1/(\rho - 1))}$

Si se sustituyen K y L en la recta presupuestaria R según los valores de v):

$$R = pK \,.\, K + pL \,.\, K \,.\, (pK \,.\, \beta/(pL \,.\, \alpha))^{(1/(\rho-1))} = R = pK \,.\, K + pL \,.\, K \,.\, (pK \,.\, \beta/(pL \,.\, \alpha))^{-\sigma}$$

$$R = K \,.\, [pK + pL \,.\, (pK \,.\, \beta/(pL \,.\, \alpha))^{(1/(\rho-1))}] = R = K \,.\, [pK + pL \,.\, (pK \,.\, \beta/(pL \,.\, \alpha))^{-\sigma}]$$

Al despejar K y L, se obtienen las cantidades demandadas marshallianas, Km y Lm:

$$Km = R/[pK + pL \,.\, (pK \,.\, \beta/(pL \,.\, \alpha))^{-\sigma}]$$

$$Km = (\alpha \,.\, pL)^{\sigma} \,.\, R/(\alpha^{\sigma} \,.\, pK \,.\, pL^{\sigma} + \beta^{\sigma} \,.\, pL \,.\, pK^{\sigma})$$

$$Lm = R/[pL + pK \,.\, (pL \,.\, \alpha/(pK \,.\, \beta))^{-\sigma}]$$

$$Lm = (\beta \,.\, pK)^{\sigma} \,.\, R/(\beta^{\sigma} \,.\, pL \,.\, pK^{\sigma} + \alpha^{\sigma} \,.\, pL \,.\, pK^{\sigma})$$

Como se puede observar, las cantidades demandas marshallianas han quedado expresadas en función de los parámetros, los precios y la restricción presupuestaria.

Si se incorporan en las demandas marshallianas los valores de los parámetros dados por la función de producción de elasticidad de sustitución constante, los precios vigentes en el período 0 (P_{K0} = 10 y P_{L0} = 5) y el valor monetario de la restricción presupuestaria (1.178,4 dólares), se pueden calcular las cantidades demandadas de los factores K y L: *K=41,32 y L=153,04*.

Si se reemplazan dichas cantidades en la función de producción directa de elasticidad de sustitución constante, *Q = f(K,L)*, se obtiene el valor de las cantidades que se deberían producir de manera óptima (100 unidades de Q):

$$Q = 1 * (0,3 \,.\, 41,32^{-0,17647} + 0,7 \,.\, 153,04^{-0,17647})^{-(1/0,17647)} = 100$$

En otras palabras, con un presupuesto de 1.178,4 dólares, teniendo en cuenta los precios vigentes en 0 (P_{K0} = 10 y P_{L0} = 5) y la tecnología dada por la función de producción directa de elasticidad de sustitución constante, la producción máxima alcanzable es de 100 unidades de Q, con una demanda de factores productivos de 41,32 unidades de K y 153,04 unidades de L.

La función de producción indirecta se obtiene reemplazando las demandas marshallianas en la función objetivo, la función de producción directa:

$$Q = f(K,L) = A\ .\ (\alpha\ .\ K^{-\rho} + \beta\, L^{-\rho}\ )^{-\nu/\rho} = A\ .\ (\alpha\ .\ Km^{-\rho} + \beta\, Lm^{-\rho}\ )^{-\nu/\rho}$$

Mediante sucesivas operaciones, se llega a la función de producción indirecta G:

$$\begin{aligned} G &= f(R,P_K,P_L) \\ &= R\ .\ [\alpha^{\sigma} * P_L^{\ \sigma-1} + \beta^{\sigma} * P_K^{\ \sigma-1}]^{\ 1/(\sigma-1)} / (P_K * P_L) \\ &= R\ .\ [\alpha^{\sigma}\ * P_K^{\ 1-\sigma}\ + \beta^{\sigma}\ * P_L^{\ 1-\sigma}]^{-1/(1-\sigma)} \end{aligned}$$

Esta función permite calcular los distintos niveles de producción máxima del producto Q, dados diferentes precios de K y L y el presupuesto disponible para remunerar la utilización de esos factores productivos.

Las demandas marshallianas también se pueden obtener a partir de la identidad de Roy:

$$Km = -\ G_{pK} / G_R$$

$$Lm = -\ G_{pL} / G_R$$

Donde:

G_{pK}: derivada de la función de producción indirecta G respecto de los precios del factor K

G_{pL}: derivada de la función de producción indirecta G respecto de los precios del factor L

G_R: derivada de la función de producción indirecta G respecto de la recta de presupuesto R

Si se calculan las derivadas, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} G_{pK} &= 1/(1-\sigma)\ .\ (\alpha^{\sigma}\ .\ P_K^{\ 1-\sigma} + \beta^{\sigma}\ .\ P_L^{\ 1-\sigma})\text{-}(1 + 1/^{(1-\sigma))} * R\ .\ (1^{-\sigma})\ .\ \alpha^{\sigma}\ .\ P_K^{\ (1-\sigma)-1} \\ G_{pL} &= 1/(1-\sigma)\ .\ (\alpha^{\sigma}\ .\ P_K^{\ 1-\sigma} + \beta^{\sigma}\ .\ P_L^{\ 1-\sigma})\text{-}(1 + 1/^{(1-\sigma))}\ .\ R * (1^{-\sigma})\ .\ \beta^{\sigma}\ .\ P_L(^{1-\sigma)-1} \\ G_R &= [\alpha^{\sigma}\ .\ P_K^{\ 1-\sigma} + \beta^{\sigma}\ .\ P_L^{\ 1-\sigma}]^{-1/(1\text{-}\sigma)} \end{aligned}$$

Se puede verificar que se llega a los mismos valores de las demandas marshallianas: *K=41,32* y *L=153,04*.

■ Recuadro A4.1
Identidad de Roy

La identidad de Roy permite obtener las demandas marshallianas a partir de una única ecuación, de una manera mucho más sencilla que la estimación tradicional, en la que se deben resolver una serie de ecuaciones mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Dado cualquier precio del factor y cualquier presupuesto, se puede obtener la cantidad demandada del factor necesaria para maximizar la producción.

Una posible explicación económica de la identidad de Roy sería la siguiente. Las cantidades marshallianas demandadas (por ejemplo, Km) se igualan a un cociente de derivadas parciales de la función de producción indirecta G, con signo negativo ($-G_{pK}$ / G_R). La derivada parcial G_{pK} indica el efecto que tiene en la producción una modificación de una unidad en el precio del factor capital pK. La derivada parcial G_R señala cómo se modifica la producción ante una variación de una unidad en la recta de presupuesto R. La derivada parcial GpK representaría la manera en la que pK se transforma en G unidades producidas, y G_R la manera en la que se transforma el presupuesto R en unidades producidas G. Como G_R está en el denominador de la identidad de Roy, en realidad, es la inversa de esa derivada, de modo que significa la manera en la que se modifica la recta de presupuesto R ante una variación de la producción G, o, lo que es lo mismo, expresa la modificación que ocurre en la producción en las unidades en las que está expresado el presupuesto R, es decir, en valores monetarios. En resumen, en primer lugar, se sabe cuánto varía la producción G ante una modificación en el precio pK (G_{pK}) y, posteriormente, esa producción G se convierte en R, esto es, en valores monetarios (G_R^{-1}). En definitiva, la multiplicación $G_{pK} . G_R^{-1}$ expresa la manera en la que una modificación en el precio pK afecta a la producción, expresada en valores monetarios. Como la producción expresada en valores monetarios es el costo de producción, la identidad de Roy se puede interpretar como el efecto que tiene en el costo de producción un aumento de una unidad en el precio del factor pK. En el ejemplo presentado, si la identidad de Roy arroja un valor de 41,32 para K, significa que una modificación de una unidad en el precio pK supone una variación de 41,32 unidades en el costo de producción. Dicho de otro modo, la identidad de Roy permite igualar las cantidades demandadas Km con el costo que tiene, en términos de producción, una variación de su precio en una unidad.

Fuente: Elaboración propia.

4. Minimización de los costos de producción

El problema de la minimización (análisis dual) consiste en seleccionar las cantidades óptimas para la demanda de factores K y L, de modo que se minimicen los costos, teniendo en cuenta el vector de precios existente y el nivel de producción específico que se desea alcanzar. Puede formularse así:

$$\min R = K.P_{K0} + L.P_{L0}, \text{ sujeto a } Q(K,L)$$

La solución al problema de la minimización implica calcular las cantidades "hicksianas" o "compensadas" (K_h y L_h), y la solución matemática se obtiene mediante el método de los multiplicadores de Lagrange.

Las cantidades demandadas hicksianas (K_h y L_h) están en función de los precios (P_K y P_L) y del nivel de producción Q, $K_h = f(P_K, Q)$ y $L_h = f(P_L, Q)$.

Dados los precios vigentes en el período 0, $P_{K0} = 10$ y $P_{L0} = 5$, y el nivel de producción de 100 unidades de Q que se desea alcanzar, la cuestión es determinar las cantidades de los factores (K_m y L_m) que permiten minimizar los costos.

Es decir:

$$\min R = K.10 + L.5, \text{ sujeto a } Q_0 = 1\ .(0{,}3\ .K^{-0{,}17647} + 0{,}7\ .L^{-0{,}17647})^{-(\frac{1}{0{,}17647})} = 100$$

Si se aplican los multiplicadores de Lagrange g, se obtiene:

$$\gamma\,(Q, K, L, \lambda) = R + \lambda * (Q - f\,(K,L)) = P_K * K + P_L * L + \lambda * (Q - f\,(K,L))$$

Las condiciones de primer orden establecen lo siguiente:

i) $\gamma_K = P_K - \lambda * f_K = 0$, donde $f_K = P_K - \lambda\ .\ \alpha\ K^{\rho-1}\ .\ (\alpha\ K^{\rho} + \beta\ L^{\rho})^{(1-\rho\ /\ \rho)} = 0$

ii) $\gamma_L = P_L - \lambda * f_L = 0$, donde $f_L = P_L - \lambda\ .\ \beta\ L^{\rho-1}\ .\ (\alpha\ K^{\rho} + \beta\ L^{\rho})^{(1-\rho\ /\ \rho)} = 0$

iii) $\gamma_{\Lambda} = Q - f_{KL} = 0$

De i) y ii) se obtiene:

iv) $P_K/P_L = f_K/f_L = (\alpha/\beta)\ .\ (K/L)^{(1+\rho)}$

Esta última expresión es la tasa marginal de sustitución entre los factores K y L (véase la sección 5 de este anexo), donde se pueden despejar K y L:

v) $L = K\ .\ (P_K\ .\ \beta/(P_L\ .\ \alpha\ ))^{(1/(1+\rho))}$

$K = \Lambda\ .\ (P_L\ .\ \alpha/(P_K\ .\ \beta\ ))^{(1/(\rho-1))}$

Si se sustituye L en la función de producción directa $Q = A.(\alpha.K^{-\rho} + \beta.L^{-\rho})^{-\nu/\rho}$, se obtiene:

$$Q = A * \{\alpha * K^{-\rho} + \beta * [K * (pK * \beta/(pL * \alpha))^{(1/(1+\rho))}]^{-\rho}]^{-\nu/\rho}\}$$

En esta función, se puede despejar K y obtener la demanda hicksiana Kh o función de demanda compensada:

$$K = (Q/A)^{1/v} [\alpha + \beta . (pK . \beta/(pL . \alpha))^{(-\rho/(1+\rho))}]^{(1/\rho)}$$

$$Kh = (Q/A)^{1/v} . (\alpha/pK)^{(1/(1+\rho))} . [\alpha^{(1/1+\rho))} . pK^{(\rho/(1+\rho))} + \beta^{(1/(1+\rho))} . pL^{(\rho/(1+\rho))}]^{(1/\rho)})$$

De forma análoga, si se despeja L se obtiene la demanda hicksiana Lh:

$$Lh = (Q/A)^{1/v} . (\beta/pL)^{(1/(1+\rho))} . [\beta^{(1/1+\rho))} . pL^{(\rho/(1+\rho))} + \alpha^{(1/(1+\rho))} . pK^{(\rho/(1+\rho))}]^{(1/\rho)}$$

Como se puede observar, las demandas hicksianas se obtienen a partir de los parámetros, los precios de los factores y las cantidades que se desea producir.

Si se incorporan en las demandas hicksianas los valores de los parámetros dados por la función de producción de elasticidad de sustitución constante, los precios vigentes en el período 0 (P_{K0} = 10 y P_{L0} = 5) y las unidades de Q que se desea producir (100), se pueden calcular las cantidades demandadas de los factores K y L: *K=41,32 y L=153,04*. Como se puede observar, estas cantidades coinciden con las cantidades marshallianas obtenidas en el capítulo III, de modo que Kh = Km y Lh = Lm.

Si en la función objetivo, la recta de presupuesto, se sustituyen K y L por las demandas hicksianas, Kh y Lh, y se realizan las operaciones necesarias, se obtiene e, que es la función de costo mínimo:

$$e = Q . [\alpha^{\sigma} . pK^{1-\sigma} + \beta^{\sigma} . pL^{1-\sigma}]^{1/(1-\sigma)} = Q . C_{(1,P)}$$

En ella, $C_{(1,P)}$ es la función de costo unitario de producción, de modo que el costo mínimo resulta de multiplicar las cantidades Q que se desea producir por el costo unitario $C_{(1,P)}$. Es un costo mínimo porque se ha calculado a partir del proceso de minimización de los costos.

Si se reemplazan los precios del período 0 (P_{K0} = 10 y P_{L0} = 5) y los parámetros del ejemplo de la función de elasticidad de sustitución constante, se obtiene que $C_{(1,P)}$ = 11,78 dólares. Como se desea producir 100 unidades de Q, se multiplica 11,78 dólares por esas 100 unidades, lo que arroja un resultado de 1.178,4 dólares, que es el valor que se requiere para retribuir las 41,32 unidades de K, a un precio de 10 dólares, y las 153,04 unidades de L, a un precio de 5 dólares. Los 1.178,4 dólares coinciden con el valor de la restricción presupuestaria impuesta en el proceso de maximización de la producción.

Una vez obtenida la función de costo unitario de producción, es muy sencillo hallar los costos mínimos para cada nivel de producción que se desee alcanzar. Por ejemplo, si se desea producir 1.500 unidades de Q, basta con multiplicar ese valor por 11,784 dólares, lo que arroja un presupuesto de 17.675,7 dólares[1]. También es posible hallar las cantidades necesarias de factores (o demandas hicksianas) Km = 619,8 y Lh= 2.295,6 unidades.

[1] Si se suponen rendimientos constantes a escala, como se explicita en este ejemplo.

En la función de costo unitario, el costo medio se iguala al costo mínimo. En efecto, una vez realizado el proceso de minimización de los costos, *e* = R.

Si en la función de costos mínimos $e = Q \,.\, C_{(1,P)}$, se reemplaza e por R, se obtiene:

$$R = Q \,.\, C_{(1,P)}$$

Si se reemplaza Q por G (la función de producción directa por la función de producción indirecta), se obtiene:

$$R = G \,.\, C_{(1,P)}$$

De modo que $G = R/C_{(1,P)} = R \,.\, C_{(1,P)}^{-1}$

Dicho en otros términos, la función de producción indirecta G es la recta de presupuesto R multiplicada por la inversa de la función de costo unitario $C_{(1,P)}^{-1}$, que es otra forma de definir la función de producción indirecta G obtenida en el análisis (primal) de maximización de la producción.

Si en la función de costo mínimo $e = G \,.\, [\alpha^{\sigma} \,.\, P_K^{1-\sigma} + \beta^{\sigma} \,.\, P_L^{1-\sigma}]^{1/(1-\sigma)}$ se procede a derivar respecto de PK, es decir, si se calcula ePK, se obtiene lo siguiente:

$$e_{PK} = G * \alpha^{\sigma} * pK^{-\sigma} * (\alpha^{\sigma} * pK^{(1-\sigma)} + \beta^{\sigma} * pL)^{(\sigma/1-\sigma)}$$

Esta última expresión, según el lema de Shephard, es el valor de la demanda hicksiana Kh, de modo que:

$$Kh = G * \alpha^{\sigma} * pK^{-\sigma} * (\alpha^{\sigma} * pK^{(1-\sigma)} + \beta^{\sigma} * pL)^{(\sigma/1-\sigma)}$$

De forma análoga:

$$Lh = e_{PL} = G * \beta^{\sigma} * pL^{-\sigma} * (\alpha^{\sigma} * pK^{(1-\sigma)} + \beta^{\sigma} * pL)^{(\sigma/1-\sigma)}$$

Esta es otra forma de obtener las demandas hicksianas de factores: la cantidad demandada de un factor es la variación del costo frente a la variación del precio del propio factor, sobre la base de que la cantidad producida se mantenga constante (ya que se trata de una cantidad óptima).

El lema de Shephard permite obtener funciones de demanda hicksianas a partir de las derivadas de la función de gastos. Como sucede con la identidad de Roy, el lema de Shepard permite evitar un procedimiento más complejo (en este caso, resolver el problema de la minimización del gasto) mediante la realización de una única ecuación.

■ Recuadro A4.2
Lema de Shephard

La interpretación económica del lema de Shephard es sencilla: cuando el precio de un factor (por ejemplo, pL) aumenta en una unidad, el costo unitario de producción aumenta de acuerdo con las cantidades demandadas del propio factor (Lh).

Fuente: Elaboración propia.

5. Elasticidad de sustitución entre factores

Los precios vigentes para los factores K y L en el período 0 (P_{K0}=10; P_{L0}=5) pueden cambiar en el período 1. Por ejemplo, si P_K en el período 1 aumenta a 11 dólares (P_{K1}=11) y P_{L1} se mantiene en 5 dólares (P_{L1}=5), el precio relativo aumenta un 10% respecto del período 0: el precio relativo P_{K0}/P_{L0}=10/5=2 pasaría a ser P_{K1}/P_{L1}=11/5=2,2.

Frente a esa modificación, la conducta racional y optimizadora del productor lo lleva a incrementar el uso del factor cuyo precio relativo se ha abaratado (L) y a disminuir el uso de aquel cuyo precio se ha encarecido (K). Obviamente, para que ello sea viable, se supone que la tecnología disponible lo hace posible y que el productor puede modificar la intensidad en el uso de los factores, mediante una decisión económica que permita mantener constante el nivel de producción en 100 (Q0=Q1=100), con un nivel mínimo de costos. Ante un aumento del precio relativo de un 10%, existe una amplia gama de combinaciones posibles de K y L, pero solo habrá una que garantice que se puede mantener el nivel de producción a un costo mínimo. ¿Cómo se pueden obtener de forma exacta los nuevos niveles de K y L que garanticen que la producción se mantiene en 100 y que los costos sean mínimos ante la modificación del precio relativo P_{K1}/P_{L1}=11/5=2,2? En otras palabras, ¿cuáles son las nuevas demandas óptimas de los factores K y L frente a un aumento del 10% del precio relativo P_K respecto de P_L?

La respuesta a esta pregunta es lo que se denomina elasticidad de sustitución entre factores. A continuación se realiza la derivación de la elasticidad de sustitución entre factores para la función de elasticidad de sustitución constante. Como se indicó más arriba, en la función de elasticidad de sustitución constante el valor de dicha elasticidad viene dado por s, que, en este ejemplo, adopta el valor s = 0,85. Ello significa que, frente a una modificación del 10% en el precio relativo P_K respecto de P_L, el productor deberá aumentar la cantidad relativa demandada de L respecto de K en un 8,5% (10% x 0,85) para mantener el nivel de producción en 100 unidades a un costo mínimo. Como se trata de una función de elasticidad de sustitución constante, el valor de la elasticidad de sustitución es constante en cualquier nivel de producción Q.

Para deducir el valor de la elasticidad de sustitución, se parte de la ecuación presentada en el punto iv) de la sección 4 sobre minimización de los costos de producción, que era la siguiente:

$$P_K/P_L = f_K/f_L = (\alpha/\beta) . (K/L)^{(1+\rho)}$$

Se tiene que:

i) $L/K = [(\beta/\alpha) * (P_K/P_L)]^{(1/(1+\rho))} = (\beta/\alpha)^{1/(1+\rho)} * (P_K/P_L)^{1/(1+\rho))}$

Si se deriva respecto de P_K / P_L, se obtiene lo siguiente:

ii) $d (L/K)/d (P_K/P_L) = (1/(1+ \rho)) * (\beta/\alpha)^{1/(1+\rho)} * (P_K/P_L)^{(1/(1+\rho)-1)}$

La elasticidad de sustitución s implica medir cómo afecta una variación porcentual en los precios relativos respecto de las cantidades demandadas; en este caso, cómo afecta P_K / P_L respecto de L/K, esto es:

iii) σ = variación porcentual L/K / variación porcentual pK/pL

$$= (d (L/K)/(L/K))/(d(P_K/P_L)/(P_K/P_L))$$
$$= (d (L/K)/d(P_K/P_L)) * ((P_K/P_L)/(L/K))$$

Si se reemplaza, según ii), (d (L/K)/d(P_K/P_L)) por (1/(1+ ρ)) * $(\beta/a)^{1/(1+\rho)}$ * $(P_K/P_L)^{(1/(1+\rho)-1)}$, se obtiene:

$$\sigma = [(1/(1+ \rho)) * (\beta/\alpha)^{1/(1+\rho)} * (P_K/P_L)^{(1/(1+\rho)-1)}] * ((P_K/P_L)/(L/K))$$

Si ahora se reemplaza, según i), (L/K) por $(\beta/\alpha)^{1/(1+\rho)}$ * (PK/PL)1/(1+r), se obtiene:

$$\sigma = [(1/(1+\rho)) * (\beta/\alpha)^{1/(1+\rho)} * (P_K/P_L)^{(1/(1+\rho)-1)}] * [(P_K/P_L)/((\beta / \alpha)^{1/(1+\rho)} * (P_K/P_L)^{1/(1+\rho))}]$$

Se elimina $(\beta/\alpha)^{1/(1+\rho)}$ y queda:

$$\sigma \quad = [(1/(1+\rho)) * (P_K/P_L)^{(1/(1+\rho)-1)} * [(P_K/P_L)]/(P_K/P_L)^{1/(1+\rho))}$$
$$= [(1/(1+\rho)) * (P_K/P_L)^{1/(1+\rho)}]/(P_K/P_L)^{1/(1+\rho)})$$

Se simplifica nuevamente y queda demostrado que, en la función de elasticidad de sustitución constante, $\sigma = 1/(1+\rho)$.

Si se utiliza esta última expresión en i), se obtiene lo siguiente:

$$L/K \quad = (\beta/\alpha)^{1/(1+\rho)} * (P_K/P_L)^{1/(1+\rho))}$$
$$= (\beta/\alpha)^{\sigma} * (P_K/P_L)^{\sigma}$$

Por lo tanto, dados los parámetros a, b y s y los precios P_K y P_L, se puede corroborar el valor de la elasticidad de sustitución s. Si se parte de la situación del período 0, con los precios (P_{K0} = 10 y P_{L0} = 5) y las cantidades óptimas (*K=41,32 y L=153,04*), se obtiene:

$$L/K = 153{,}04/41{,}32 = 3{,}70 \text{ y}$$
$$(\beta/\alpha)^{\sigma} * (P_K/P_L)^{\sigma} = (0{,}70/0{,}30)^{0{,}85} * (10/5)^{0{,}85} = 3{,}70$$

Si el precio relativo de la situación 0 (P_K/P_L = 10/5 = 2) aumenta un 10%, pasando a 2,2, debido al aumento de un 10% de P_K (P_K/P_L = 11/5 = 2,2), se vuelve a calcular $(\beta/\alpha)^{\sigma} * (P_K/P_L)^{\sigma} = (0{,}70/0{,}30)^{0{,}85} * (11/5)^{0{,}85}$ = 4,02, de modo que 4,02/3,70 representa un aumento del 8,44%, que refleja el aumento de L / K, originado en un aumento del 10% en P_K. El valor del 8,44% coincide con el valor de la elasticidad de sustitución s = 0,85 y con el nuevo punto óptimo de utilización de los factores correspondientes al período 1. En efecto, si se comparan las cantidades relativas del período 1 (*L/K =157,47/39,21=4,016*) con las del período 0 (*L/K =153,04/41,32=3,704*), se obtiene un aumento de un 8,44% en el uso relativo de L respecto de K.

Anexo A5

El problema de la desviación

Este ejemplo, tomado del *Manual de cuentas nacionales trimestrales: conceptos, fuentes de datos y compilación*[2] del Fondo Monetario Internacional, muestra una situación en la que los precios y las cantidades de dos productos (A y B) son los mismos en el período inicial (trimestre 1[3]) y en el final (trimestre 4). Como se podrá observar, los índices de volumen en base fija de Laspeyres, de Paasche y de Fisher arrojan un valor 100 para ambos períodos (como era de esperar), mientras que los índices encadenados de Laspeyres, de Paasche y de Fisher arrojan un valor de 100 en el período inicial, pero es distinto en el período final.

■ Cuadro A5.1

Frecuencia del encadenamiento y problema de la "desviación" en el caso de las fluctuaciones de precios y cantidades

Observación/trimestre	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
Precio rubro A (pA)	2	3	4	2
Precio rubro B (pB)	5	4	2	5
Cantidades rubro A (qAt)	50	40	60	50
Cantidades rubro B (qBt)	60	70	30	60
Valor total (Vt)	400	400	300	400
Índices de volumen	**Trimestre 1**	**Trimestre 2**	**Trimestre 3**	**Trimestre 4**
Laspeyres en base fija (trimestre 1 como base)	100.0	107,5	67,5	100,0
Paasche (trimestre 1 como base)	100.0	102,6	93,8	100,0
Fisher en base fija (trimestre 1 como base)	100.0	105,0	79,6	100,0
Laspeyres trimestral encadenado	100.0	107,5	80,6	86,0
Paasche trimestral encadenado	100.0	102,6	102,6	151,9
Fisher trimestral encadenado	100.0	105,0	90,9	114,3

2 Véase A. Bloem, R. Dippelsman y N. Maehle, *Manual de cuentas nacionales trimestrales: conceptos, fuentes de datos y compilación*, Washington D.C., Fondo Monetario Internacional (FMI), 2001 [en línea] http://www.imf.org/external/pubs/ft/qna/2000/textbook/spa/text.pdf.

3 En el ejemplo se utilizan trimestres como períodos, pero el ejemplo se puede extender también a los períodos anuales, con los mismos valores.

Anexo A6

Ejercicios prácticos: medidas encadenadas de volumen anual

Este anexo incluye tres ejercicios para aplicar la fórmula de cálculo del índice de volumen en cadena.

Ejercicio 1. En los cuadros A6.1 y A6.2 se presenta la serie del producto interno bruto (PIB) de un país de 2001 a 2015, a precios corrientes y constantes de 2005, respectivamente, desglosado desde el enfoque de la producción.

■ Cuadro A6.1
Valor agregado bruto por sectores y producto interno bruto (PIB)

(En miles de pesos corrientes)

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura	Informática	Producto interno bruto total
2001	150	300	370	200	1 020
2002	150	320	379	190	1 039
2003	160	340	386	180	1 066
2004	170	360	393	170	1 093
2005	180	380	400	160	1 120
2006	190	400	405	150	1 145
2007	200	420	410	140	1 170
2008	150	370	375	120	1 015
2009	160	390	383	110	1 043
2010	170	410	390	100	1 070
2011	180	430	397	90	1 097
2012	190	450	404	80	1 124
2013	200	470	411	70	1 151
2014	210	490	418	60	1 178
2015	220	510	425	50	1 205

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A6.2
Valor agregado bruto por sectores y producto interno bruto (PIB)

(En miles de pesos constantes de 2005)

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura	Informática	Producto interno bruto total
2001	160	340	380	80	960
2002	165	350	385	100	1 000
2003	170	360	390	120	1 040
2004	175	370	395	140	1 080
2005	180	380	400	160	1 120

Cuadro A6.2 (conclusión)

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura	Informática	Producto interno bruto total
2006	185	390	405	180	1 160
2007	190	400	410	200	1 200
2008	180	350	380	190	1 100
2009	185	360	385	210	1 140
2010	190	370	390	230	1 180
2011	195	380	395	250	1 220
2012	200	390	400	270	1 260
2013	205	400	405	290	1 300
2014	210	410	410	310	1 340
2015	215	420	415	330	1 380

Fuente: Elaboración propia.

Se trata de calcular el índice encadenado, teniendo 2005 como año de referencia, y el producto interno bruto (PIB), expresado en cadena monetaria de 2005.

Solución

Paso 1: calcular los índices elementales (2005=100).

■ Cuadro A6.3
Índices elementales de volumen
(2005=100)

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura	Informática
2001	88,89	89,47	95,00	50,00
2002	91,67	92,11	96,25	62,50
2003	94,44	94,74	97,50	75,00
2004	97,22	97,37	98,75	87,50
2005	100,00	100,00	100,00	100,00
2006	102,78	102,63	101,25	112,50
2007	105,56	105,26	102,50	125,00
2008	100,00	92,11	95,00	118,75
2009	102,78	94,74	96,25	131,25
2010	105,56	97,37	97,50	143,75
2011	108,33	100,00	98,75	156,25
2012	111,11	102,63	100,00	168,75
2013	113,89	105,26	101,25	181,25
2014	116,67	107,89	102,50	193,75
2015	119,44	110,53	103,75	206,25

Fuente: Elaboración propia.

Paso 2: calcular los ponderadores anuales a precios corrientes.

■ Cuadro A6.4
Ponderadores anuales a precios corrientes

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura	Informática	Total
2001	0,1471	0,2941	0,3627	0,1961	1,0000
2002	0,1444	0,3080	0,3648	0,1829	1,0000
2003	0,1501	0,3189	0,3621	0,1689	1,0000
2004	0,1555	0,3294	0,3596	0,1555	1,0000
2005	0,1607	0,3393	0,3571	0,1429	1,0000
2006	0,1659	0,3493	0,3537	0,1310	1,0000
2007	0,1709	0,3590	0,3504	0,1197	1,0000
2008	0,1478	0,3645	0,3695	0,1182	1,0000
2009	0,1534	0,3739	0,3672	0,1055	1,0000
2010	0,1589	0,3832	0,3645	0,0935	1,0000
2011	0,1641	0,3920	0,3619	0,0820	1,0000
2012	0,1690	0,4004	0,3594	0,0712	1,0000
2013	0,1738	0,4083	0,3571	0,0608	1,0000
2014	0,1783	0,4160	0,3548	0,0509	1,0000
2015	0,1826	0,4232	0,3527	0,0415	1,0000

Fuente: Elaboración propia.

Paso 3: calcular los índices elementales de volumen (año anterior = 100).

■ Cuadro A6.5
Índices elementales de volumen

(Año anterior = 100)

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura	Informática
2001				
2002	103,13	102,94	101,32	125,00
2003	103,03	102,86	101,30	120,00
2004	102,94	102,78	101,28	116,67
2005	102,86	102,70	101,27	114,29
2006	102,78	102,63	101,25	112,50
2007	102,70	102,56	101,23	111,11
2008	94,74	87,50	92,68	95,00
2009	102,78	102,86	101,32	110,53

Cuadro A6.5 (conclusión)

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura	Informática
2010	102,70	102,78	101,30	109,52
2011	102,63	102,70	101,28	108,70
2012	102,56	102,63	101,27	108,00
2013	102,50	102,56	101,25	107,41
2014	102,44	102,50	101,23	106,90
2015	102,38	102,44	101,22	106,45

Fuente: Elaboración propia.

Paso 4: calcular los eslabones, multiplicando los ponderadores anuales por los índices de volumen (año anterior = 100).

■ Cuadro A6.6
Eslabones

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura	Informática	Suma
2001					
2002	15,17	30,28	36,75	24,51	106,70
2003	14,87	31,68	36,95	21,94	105,45
2004	15,45	32,78	36,67	19,70	104,61
2005	16,00	33,83	36,41	17,78	104,01
2006	16,52	34,82	36,16	16,07	103,57
2007	17,04	35,83	35,81	14,56	103,24
2008	16,19	31,41	32,48	11,37	91,45
2009	15,19	37,49	37,43	13,07	103,18
2010	15,75	38,43	37,20	11,55	102,93
2011	16,31	39,35	36,92	10,16	102,73
2012	16,83	40,23	36,65	8,86	102,57
2013	17,33	41,06	36,39	7,64	102,43
2014	17,80	41,85	36,15	6,50	102,30
2015	18,25	42,61	35,92	5,42	102,20

Fuente: Elaboración propia.

Paso 5: calcular el índice encadenado (año de referencia: 2005) y la cadena monetaria del PIB de 2005.

■ Cuadro A6.7
Índice encadenado y producto interno bruto (PIB) en cadena monetaria de 2005

Año	Índice encadenado *(Año de referencia: 2005)*	Producto interno bruto *(Cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual
2001	81,68	915	
2002	87,16	976	6,7
2003	91,91	1 029	5,4
2004	96,14	1 077	4,6
2005	100,00	1 120	4,0
2006	103,57	1 160	3,6
2007	106,92	1 198	3,2
2008	97,78	1 095	-8,5
2009	100,89	1 130	3,2
2010	103,86	1 163	2,9
2011	106,69	1 195	2,7
2012	109,43	1 226	2,6
2013	112,09	1 255	2,4
2014	114,67	1 284	2,3
2015	117,19	1 313	2,2

Fuente: Elaboración propia.

En el cuadro A6.8 se calcula el PIB a precios constantes de 2005, con el fin de comparar los resultados de las tasas de variación anual y la discrepancia estadística por falta de aditividad en las cifras encadenadas4.

■ Cuadro A6.8
Producto interno bruto (PIB) a precios constantes de 2005 y discrepancia estadística por falta de aditividad

Año	Base fija	Variación porcentual, base fija	Discrepancia estadística
2001	960		-45
2002	1 000	4,2	-24
2003	1 040	4,0	-11
2004	1 080	3,8	-3
2005	1 120	3,7	-
2006	1 160	**3,6**	-
2007	1 200	3,4	-2
2008	1 100	-8,3	-5
2009	1 140	3,6	-10

[4] Es la diferencia entre las cifras del producto interno bruto (PIB) en la cadena monetaria de 2005 y el PIB a precios constantes de 2005.

Cuadro A6.8 (conclusión)

Año	Base fija	Variación porcentual, base fija	Discrepancia estadística
2010	1 180	3,5	-17
2011	1 220	3,4	-25
2012	1 260	3,3	-34
2013	1 300	3,2	-45
2014	1 340	3,1	-56
2015	1 380	3,0	-67

Fuente: Elaboración propia.
Nota: Con la cifra destacada se indica que la tasa de variación del primer año consecutivo (2006) respecto del año base (2005) coincide con la tasa de variación del índice encadenado que se presenta en el cuadro A6.7.

Ejercicio 2. En los cuadros A6.9 y A6.10 se presenta el PIB del ejercicio anterior, pero medido desde el enfoque del gasto. Se trata de calcular el índice encadenado, teniendo como año de referencia 2005, y el PIB, según la cadena monetaria de 2005.

■ Cuadro A6.9

Producto interno bruto por componente del gasto

(En miles de pesos corrientes)

Sectores	Consumo	Formación de capital	Exportaciones	Importaciones	Producto interno bruto total
2001	650	300	400	-330	1 020
2002	670	305	405	-341	1 039
2003	690	310	400	-334	1 066
2004	710	320	405	-342	1 093
2005	730	325	410	-345	1 120
2006	750	330	415	-350	1 145
2007	770	335	420	-355	1 170
2008	760	280	410	-435	1 015
2009	780	295	415	-447	1 043
2010	800	300	420	-450	1 070
2011	820	305	425	-453	1 097
2012	840	315	427	-458	1 124
2013	860	320	432	-461	1 151
2014	880	325	437	-464	1 178
2015	900	330	442	-467	1 205

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A6.10

Producto interno bruto por componente del gasto

(En miles de pesos de 2005)

Sectores	Consumo	Formación de capital	Exportaciones	Importaciones	Producto interno bruto total
2001	710	285	390	-425	960
2002	715	295	395	-405	1 000
2003	720	305	400	-385	1 040
2004	725	315	405	-365	1 080
2005	730	325	410	-345	1 120
2006	735	335	415	-325	1 160
2007	740	345	430	-315	1 200
2008	730	295	410	-335	1 100
2009	735	305	420	-320	1 140
2010	740	315	425	-300	1 180
2011	745	325	430	-280	1 220
2012	750	335	435	-260	1 260
2013	755	345	440	-240	1 300
2014	760	355	445	-220	1 340
2015	765	365	450	-200	1 380

Fuente: Elaboración propia.

Para resolver el ejercicio, se deben repetir los pasos detallados en el ejercicio anterior. Se muestran los resultados en el cuadro A6.11.

■ Cuadro A6.11

Índice de volumen encadenado (año de referencia: 2005) y producto interno bruto según la cadena monetaria de 2005, desde el enfoque del gasto

Año	Índice encadenado *(año de referencia: 2005)*	PIB enfoque del gasto *(cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual	Enfoque de la producción *(cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual, enfoque de la producción	Diferencia (enfoque del gasto menos enfoque de la producción) *(cadena monetaria de 2005)*
2001	87,05	975		915		60
2002	90,10	1 009	3,5	976	6,7	33
2003	93,31	1 045	3,6	1 029	5,4	16
2004	96,57	1 082	3,5	1 077	4,6	5
2005	100,00	1 120	3,5	1 120	4,0	-
2006	103,57	1 160	3,6	1 160	3,6	-
2007	107,25	1 201	3,6	1 198	3,2	4
2008	97,99	1 098	-8,6	1 095	-8,5	2
2009	102,26	1 145	4,4	1 130	3,2	15

Cuadro A6.11 (conclusión)

Año	Índice encadenado *(año de referencia: 2005)*	PIB enfoque del gasto *(cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual	Enfoque de la producción *(cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual, enfoque de la producción	Diferencia (enfoque del gasto menos enfoque de la producción) *(cadena monetaria de 2005)*
2010	106,95	1 198	4,6	1 163	2,9	35
2011	111,93	1 254	4,7	1 195	2,7	59
2012	117,26	1 313	4,8	1 226	2,6	88
2013	123,01	1 378	4,9	1 255	2,4	122
2014	129,24	1 448	5,1	1 284	2,3	163
2015	136,05	1 524	5,3	1 313	2,2	211

Fuente: Elaboración propia.

También se han incluido, a efectos de comparación, los resultados del PIB desde el enfoque de la producción obtenidos en el ejercicio 1.

Ejercicio 3. En los cuadros A6.12 y A6.13 se presenta la serie del PIB del ejercicio 1, desglosado por sectores, con un mayor desglose del sector manufacturero.

■ Cuadro A6.12

Valor agregado bruto por sectores, con un desglose mayor y producto interno bruto (PIB)

(En miles de pesos corrientes)

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura				Informática	Producto interno bruto total
			Alimentación	Textil	Automotor	Maquinaria		
2001	150	300	74	37	167	92	200	1 020
2002	150	320	78	36	172	93	190	1 039
2003	160	340	78	36	175	97	180	1 066
2004	170	360	82	34	179	98	170	1 093
2005	180	380	80	33	182	105	160	1 120
2006	190	400	81	35	184	105	150	1 145
2007	200	420	82	36	185	107	140	1 170
2008	150	370	75	32	160	108	120	1 015
2009	160	390	77	33	174	99	110	1 043
2010	170	410	78	29	178	105	100	1 070
2011	180	430	79	28	179	111	90	1 097
2012	190	450	81	25	182	116	80	1 124
2013	200	470	82	23	185	121	70	1 151
2014	210	490	83	22	188	125	60	1 178
2015	220	510	85	20	191	129	50	1 205

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A6.13

Valor agregado bruto por sectores, con un desglose mayor, producto interno bruto (PIB)

(En miles de pesos de 2005)

Sectores	Agricultura y ganadería	Minería	Manufactura				Informática	Producto interno bruto total
			Alimentación	Textil	Automotor	Maquinaria		
2001	160	340	76	38	171	95	80	960
2002	165	350	79	39	173	94	100	1 000
2003	170	360	80	39	176	95	120	1 040
2004	175	370	83	40	178	94	140	1 080
2005	180	380	80	33	182	105	160	1 120
2006	185	390	86	39	182	98	180	1 160
2007	190	400	88	41	185	96	200	1 200
2008	180	350	89	38	165	88	190	1 100
2009	185	360	92	39	173	81	210	1 140
2010	190	370	94	39	176	81	230	1 180
2011	195	380	96	40	178	81	250	1 220
2012	200	390	99	40	180	81	270	1 260
2013	205	400	101	41	182	81	290	1 300
2014	210	410	103	41	185	81	310	1 340
2015	215	420	104	42	187	82	330	1 380

Fuente: Elaboración propia.

Para resolver el ejercicio, se deben repetir los pasos detallados en los ejercicios anteriores. En el cuadro A6.14 se muestran los resultados y la comparación con los resultados del ejercicio 1.

■ Cuadro A6.14

Índice de volumen encadenado (año de referencia: 2005) y producto interno bruto según la cadena monetaria de 2005, con un desglose mayor, desde el enfoque de la producción

Año	Índice encadenado *(año de referencia: 2005)*	PIB enfoque del gasto *(cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual	PIB enfoque de la producción (ejercicio 1) *(cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual	Diferencia con el enfoque de la producción del ejercicio 1 *(cadena monetaria de 2005)*
2001	81,58	914		915		-1
2002	87,05	975	6,7	976	6,7	-1
2003	91,79	1 028	5,5	1 029	5,4	-1
2004	96,01	1 075	4,6	1 077	4,6	-2
2005	100,00	1 120	4,2	1 120	4,0	-

Cuadro A6.14 (conclusión)

Año	Índice encadenado *(año de referencia: 2005)*	PIB enfoque del gasto *(cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual	PIB enfoque de la producción (ejercicio 1) *(cadena monetaria de 2005)*	Variación porcentual	Diferencia con el enfoque de la producción del ejercicio 1 *(cadena monetaria de 2005)*
2006	103,57	1 160	3,6	1 160	3,6	-
2007	106,88	1 197	3,2	1 198	3,2	-0
2008	97,69	1 094	-8,6	1 095	-8,5	-1
2009	100,57	1 126	2,9	1 130	3,2	-4
2010	103,49	1 159	2,9	1 163	2,9	-4
2011	106,27	1 190	2,7	1 195	2,7	-5
2012	108,94	1 220	2,5	1 226	2,6	-6
2013	111,51	1 249	2,4	1 255	2,4	-6
2014	114,04	1 277	2,3	1 284	2,3	-7
2015	116,53	1 305	2,2	1 313	2,2	-7

Fuente: Elaboración propia.

Anexo A7

Ejercicios prácticos: paridades del poder adquisitivo (PPA)

Ejercicio 1: cálculo de la PPA para un encabezado básico (EB)

Se trata de calcular la PPA de un EB de cinco productos entre cuatro países (A, B, C, D).

i) Partiendo de la matriz del cuadro A7.1, calcular la PPA del EB en el caso de una matriz de información completa, mediante el método de Jevons. Realizar el cálculo tomando primero el país A como país base, luego el B y así sucesivamente.

■ Cuadro A7.1
Matriz de precios

	País A	País B	País C	País D
Producto 1	10	25	12	15
Producto 2	100	75	80	110
Producto 3	5	7	12	6
Producto 4	56	60	54	62
Producto 5	20	22	30	25

Fuente: Elaboración propia.

Respuesta

■ Cuadro A7.2
País A como base

	País A	País B	Paridad del poder adquisitivo (B/A)	
Producto 1	10	25	2,5	
Producto 2	100	75	0,75	
Producto 3	5	7	1,4	
Producto 4	56	60	1,071429	
Producto 5	20	22	1,1	1,253421

	País A	País C	Paridad del poder adquisitivo (C/A)	
Producto 1	10	12	1,2	
Producto 2	100	80	0,8	
Producto 3	5	12	2,4	
Producto 4	56	54	0,964286	
Producto 5	20	30	1,5	1,272201

Cuadro A7.2 (conclusión)

	País A	País D	Paridad del poder adquisitivo (D/A)	
Producto 1	10	15	1,5	
Producto 2	100	110	1,1	
Producto 3	5	6	1,2	
Producto 4	56	62	1,107143	
Producto 5	20	25	1,25	1,223364

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.3
País B como base

	País B	País A	Paridad del poder adquisitivo (A/B)	
Producto 1	25	10	0,4	
Producto 2	75	100	1,333333333	
Producto 3	7	5	0,714285714	
Producto 4	60	56	0,933333333	
Producto 5	22	20	0,909090909	0,797816

	País B	País C	Paridad del poder adquisitivo (C/B)	
Producto 1	25	12	0,48	
Producto 2	75	80	1,066666667	
Producto 3	7	12	1,714285714	
Producto 4	60	54	0,9	
Producto 5	22	30	1,363636364	1,014983

	País B	País D	Paridad del poder adquisitivo (D/B)	
Producto 1	25	15	0,6	
Producto 2	75	110	1,466666667	
Producto 3	7	6	0,857142857	
Producto 4	60	62	1,033333333	
Producto 5	22	25	1,136363636	0,97602

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.4
País C como base

	País C	País A	Paridad del poder adquisitivo (A/C)	
Producto 1	12	10	0,833333	
Producto 2	80	100	1,25	
Producto 3	12	5	0,416667	
Producto 4	54	56	1,037037	
Producto 5	30	20	0,666667	0,786039

	País C	País B	Paridad del poder adquisitivo (B/C)	
Producto 1	12	25	2,083333	
Producto 2	80	75	0,9375	
Producto 3	12	7	0,583333	
Producto 4	54	60	1,111111	
Producto 5	30	22	0,733333	0,985238

	País C	País D	Paridad del poder adquisitivo (D/C)	
Producto 1	12	15	1,25	
Producto 2	80	110	1,375	
Producto 3	12	6	0,5	
Producto 4	54	62	1,148148	
Producto 5	30	25	0,833333	0,961612

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.5
País D como base

	País D	País A	Paridad del poder adquisitivo (A/D)	
Producto 1	15	10	0,666667	
Producto 2	110	100	0,909091	
Producto 3	6	5	0,833333	
Producto 4	62	56	0,903226	
Producto 5	25	20	0,8	0,817418

Cuadro A7.5 (conclusión)

	País D	País B	Paridad del poder adquisitivo (B/D)	
Producto 1	15	25	1,666667	
Producto 2	110	75	0,681818	
Producto 3	6	7	1,166667	
Producto 4	62	60	0,967742	
Producto 5	25	22	0,88	1,024569

	País D	País C	Paridad del poder adquisitivo (C/D)	
Producto 1	15	12	0,8	
Producto 2	110	80	0,727273	
Producto 3	6	12	2	
Producto 4	62	54	0,870968	
Producto 5	25	30	1,2	1,03992

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.6
Resumen de la paridad del poder adquisitivo de un encabezado básico

	A	B	C	D
Base A	1,0000	1,2534	1,2722	1,2234
Base B	0,7978	1,0000	1,0150	0,9760
Base C	0,7860	0,9852	1,0000	0,9616
Base D	0,8174	1,0246	1,0399	1,0000

Fuente: Elaboración propia.

ii) Comprobar la transitividad de las paridades obtenidas.

■ Cuadro A7.7
Transitividad

Paridad B/A	1,253
Paridad B/C * C/A	1,253
Paridad B/D * D/A	1,253

Fuente: Elaboración propia.

iii) Partiendo de la matriz del cuadro A7.8, calcular la PPA del EB en el caso de una matriz con información incompleta, mediante el método Jevons-GEKS (Gini-Eltetö-Köves-Szulc). Realizar el cálculo tomando primero el país A como país base, luego el B y así sucesivamente.

■ Cuadro A7.8
Matriz de precios

	País A	País B	País C	País D
Producto 1	10		12	15
Producto 2	100	75		110
Producto 3		7	12	
Producto 4	56	60	54	
Producto 5		22	30	25
Cantidad de productos j por país (Nj)	3	4	4	3

Fuente: Elaboración propia.

Respuesta

■ Cuadro A7.9
País A como base

	País A	País B	Paridad del poder adquisitivo (B/A)	
Producto 1	10			
Producto 2	100	75	0,75	
Producto 3		7		
Producto 4	56	60	1,071428571	
Producto 5		22		0,896421

	País A	País C	Paridad del poder adquisitivo (C/A)	
Producto 1	10	12	1,2	
Producto 2	100			
Producto 3		12		
Producto 4	56	54	0,964285714	
Producto 5		30		1,075706

	País A	País D	Paridad del poder adquisitivo (D/A)	
Producto 1	10	15	1,5	
Producto 2	100	110	1,1	
Producto 3				
Producto 4	56			
Producto 5		25		1,284523

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.10
País B como base

	País B	País A	Paridad del poder adquisitivo (A/B)	
Producto 1		10		
Producto 2	75	100	1,333333	
Producto 3	7			
Producto 4	60	56	0,933333	
Producto 5	22			1,115547

	País B	País C	Paridad del poder adquisitivo (C/B)	
Producto 1		12		
Producto 2	75			
Producto 3	7	12	1,714286	
Producto 4	60	54	0,9	
Producto 5	22	30	1,363636	1,281371

	País B	País D	Paridad del poder adquisitivo (D/B)	
Producto 1		15		
Producto 2	75	110	1,466667	
Producto 3	7			
Producto 4	60			
Producto 5	22	25	1,136364	1,290994

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.11
País C como base

	País C	País A	Paridad del poder adquisitivo (A/C)	
Producto 1	12	10	0,833333	
Producto 2		100		
Producto 3	12			
Producto 4	54	56	1,037037	
Producto 5	30			0,929622

Cuadro A7.11 (conclusión)

	País C	País B	Paridad del poder adquisitivo (B/C)	
Producto 1	12			
Producto 2		75		
Producto 3	12	7	0,583333	
Producto 4	54	60	1,111111	
Producto 5	30	22	0,733333	0,780414

	País C	País D	Paridad del poder adquisitivo (D/C)	
Producto 1	12	15	1,25	
Producto 2		110		
Producto 3	12			
Producto 4	54			
Producto 5	30	25	0,833333	1,020621

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.12
País D como base

	País D	País A	Paridad del poder adquisitivo (A/D)	
Producto 1	15	10	0,666667	
Producto 2	110	100	0,909091	
Producto 3				
Producto 4		56		
Producto 5	25			0,778499

	País D	País B	Paridad del poder adquisitivo (B/D)	
Producto 1	15			
Producto 2	110	75	0,681818	
Producto 3		7		
Producto 4		60		
Producto 5	25	22	0,88	0,774597

Cuadro A7.12 (conclusión)

	País D	País C	Paridad del poder adquisitivo (C/D)	
Producto 1	15	12	0,8	
Producto 2	110			
Producto 3		12		
Producto 4		54		
Producto 5	25	30	1,2	0,979796

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.13
Resumen de la paridad del poder adquisitivo de un encabezado básico no transitivo

	A	B	C	D
Base A	1,0000	0,8964	1,0757	1,2845
Base B	1,1155	1,0000	1,2814	1,2910
Base C	0,9296	0,7804	1,0000	1,0206
Base D	0,7785	0,7746	0,9798	1,0000

Fuente: Elaboración propia.

iv) Comprobar la transitividad antes de aplicar el método Jevons-GEKS.

■ Cuadro A7.14
No transitivo

Paridad B/A	0,896
Paridad B/C * C/A	0,839
Paridad B/D * D/A	0,995

Fuente: Elaboración propia.

v) Comprobar la transitividad después de aplicar el método Jevons-GEKS.

■ Cuadro A7.15
Paridad del poder adquisitivo, Jevons-GEKS

	A	B	C	D
Base A	1,0000	0,9051	1,1373	1,2033
Base B	1,1048	1,0000	1,2565	1,0581
Base C	0,8793	0,7959	1,0000	1,0581
Base D	0,9869	0,7522	0,9451	1,0000

Cuadro A7.15 (conclusión)

	A	B	C	D
Transitivo				
Paridad B/A	0,905			
Paridad B/C * C/A	0,905			
Paridad B/D * D/A	0,905			

Fuente: Elaboración propia.

Ejercicio 2: agregación de dos encabezados básicos

Sobre la base de las PPA calculadas para dos encabezados básicos (v y w) en cuatro países (A, B, C y D), realizar el cálculo de agregación mediante el método Jevons-GEKS, empleando la información sobre los gastos.

■ Cuadro A7.16
Matriz de paridades

Encabezado básico	País			
	A	B	C	D
v	0,0746	0,8657	29,2159	0,5298
w	0,0731	0,9504	20,7252	0,6945

Fuente: Elaboración propia.

■ Cuadro A7.17
Matriz de gastos

Encabezado básico	País			
	A	B	C	D
v	5	110	2 000	120
w	20	240	5 300	180

Fuente: Elaboración propia.

A continuación se presentan los pasos que se deben seguir.

i) Calcular los índices de Laspeyres empleando los gastos del país base.

■ Cuadro A7.18
Cálculo de los índices de Laspeyres en que se emplean los gastos del país base

	A	B	C	D
Base A	1,00	12,72	305,14	9,02
Base B	0,08	1,00	25,56	0,69
Base C	0,003	0,04	1,00	0,03
Base D	0,12	1,47	39,96	1,00

Fuente: Elaboración propia.

ii) Calcular los índices de Paasche.

■ Cuadro A7.19
Cálculo de los índices de Paasche

	A	B	C	D
Base A	1,00	12,53	306,72	8,37
Base B	0,08	1,00	24,15	0,68
Base C	0,003	0,04	1,00	0,03
Base D	0,11	1,44	34,13	1,00

Fuente: Elaboración propia.

iii) Calcular los índices de Fisher.

■ Cuadro A7.20
Cálculo de los índices de Fisher

	A	B	C	D
Base A	1,0000	12,6244	305,9281	8,6893
Base B	0,0792	1,0000	24,8438	0,6857
Base C	0,0033	0,0403	1,0000	0,0271
Base D	0,1151	1,4583	36,9331	1,0000

Fuente: Elaboración propia.

iv) Aplicar el método Jevons-GEKS.

■ Cuadro A7.21
Aplicación del método Jevons-GEKS

	A	B	C	D
Base A	1,0000	12,5578	311,5419	8,5779
Base B	0,0796	1,0000	24,8086	0,6831
Base C	0,0032	0,0403	1,0000	0,0275
Base D	0,1166	1,4640	36,3190	1,0000

Fuente: Elaboración propia.

v) Comprobar la transitividad.

■ Cuadro A7.22
Transitividad

EKS[a] A/C =	0,0032
EKS A/B / EKS C/B	0,0032
EKS A/D / EKS C/D	0,0032

Fuente: Elaboración propia.
[a] EKS: Eltetö-Köves-Szulc.

Si se multiplican todos los elementos de la fila que toman el país A como base por EKS A/B, se obtiene la fila que toma como base el país B.

■ Cuadro A7.23

Cambio de base

	A	B	C	D
Base A	1,0000	12,5578	311,5419	8,5779
EKS[a] A/B	0,0796	0,0796	0,0796	0,0796
Base B	0,0796	1,0000	24,8086	0,6831

Fuente: Elaboración propia.
[a] EKS: Eltetö-Köves-Szulc.

Anexo A8

Cuadros Quaranta, cuadros Dikhanov y paridades de referencia

1. Cuadros Quaranta

El cuadro Quaranta está compuesto por cuatro subcuadros. En el primero se muestra el título del encabezado básico (EB), el código, la fecha en la que se elaboró el cuadro, el período al que hace referencia, el método para el cálculo de los precios promedio de cada uno de los productos que conforman el EB y el método de cálculo de las paridades del EB.

En el segundo subcuadro se presenta la información resumida, por ejemplo, la cantidad de productos incluidos en el análisis del EB, la cantidad de países que cotizaron productos, el país que se ha utilizado como base para el cálculo de la paridad del poder adquisitivo (PPA), la ponderación promedio del EB en las cuentas nacionales y el coeficiente de variación promedio. Este coeficiente toma en cuenta la variabilidad de todos los productos del EB en todos los países.

Se elabora un cuadro Quaranta por cada EB que conforma la lista de productos. En el cuadro A8.1 se muestra su formato, con un ejemplo referente al arroz.

■ Cuadro A8.1
Cuadro Quaranta

DIAGNÓSTICO MEDIANTE CUADRO QUARANTA - Arroz						
Criterios de selección de datos						
Código del encabezado básico	99.11.01.11.1	Período de tiempo		Anual	Fecha en la que se hace la tabla	4/13/2011
Método de obtención del promedio	Media aritmética	Imputación		CPD		
Información de resumen						
Número de productos incluidos en el análisis	6 de 6	Ponderación promedio del encabezado básico en el gasto total				0,0
Número de países incluidos en el análisis	18 de 18	Variación promedio del coeficiente				27,4
País base	Estados Unidos					
Detalles a nivel de país						
# Las ponderaciones se multiplican por 10 000						
Países	**XR**	**PPP**	**PLI (%)**	**Weight#**	**Items**	**Var. Co.**
País 1	4,42	1,815	48,08	0	2;*0	7,2
País 2	959,04	718,277	74,90	0	5;*0	8,2
País 3	1 018,4	2,7696	0,27	0	2;*0	33,8

Cuadro A8.1 (conclusión)

Detalles a nivel de producto								
99.11.01. 11.1.01		Arroz de grano largo, preenvasado			Var. Co.	25,9		1-kg
Países	NC-Price	Quotations	Var. Co.	XR-price	XR-ratio	CUP-price	CUP-ratio	Pref. UoM
País 1	1 500	151	11,2	0,34	45,89	0,83	95,02	N.D.
País 2	-	-	-	-	-	-	-	N. D.
País 3	766 381	10	3	72,93	9 857,6	1,14	130,66	N. D.

Fuente: Elaboración propia.
Nota: CPD: método país-producto simulado (PPS) (*country-product-dummy*). En los detalles a nivel de país, XR: tipo de cambio de mercado entre la moneda nacional y la del país base; PPP: paridad del poder adquisitivo; PLI: índice del nivel de precios (PPP/XR); Weight: ponderación del encabezado básico proporcionado por las oficinas de cuentas nacionales; Items: el primer número indica la cantidad de productos cotizados y el segundo la cantidad de productos que son importantes; Var. Co.: coeficiente de variación dentro de cada país para todos los productos que conforman el encabezado básico. En los detalles a nivel de producto, NC-Price: precio promedio del producto expresado en moneda nacional; Quotations: número de observaciones; Var. Co.: coeficiente de variación de las observaciones del producto en cada país; XR-price: precio promedio nacional convertido a la moneda del país base, utilizando el tipo de cambio de mercado; XR-ratio: XR-price/XR-price promedio; CUP-price: precio promedio nacional de cada país convertido a la moneda del país base, usando las paridades del poder adquisitivo; CUP-ratio: PPP-price/PPP-price promedio; Pref. UoM: unidad de medida preferida; N. D.: no disponible.

A continuación, se explican los indicadores del subcuadro 3 (sobre detalles a nivel de país):

- XR: tipo de cambio de mercado entre la moneda nacional y la del país base.
- PPP: paridad del poder adquisitivo. Se calcula para el EB a partir de los precios promedio, mediante el método país-producto simulado (PPS) (*country-product-dummy* (CPD)). Se expresa en unidades de la moneda nacional por unidad de la moneda del país base. Es un tipo de cambio basado en la PPA.
- PLI: índice del nivel de precios (PPP/XR). Si el PLI es superior a 100, significa que los precios del país de que se trate son superiores a los del país base.
- Weight: es la ponderación del EB proporcionada por las oficinas de cuentas nacionales. Está multiplicada por 10.000. Se utiliza para tener una noción de la importancia del EB.
- Items: el primer número indica la cantidad de productos cotizados y, el segundo, la cantidad de productos que son importantes.
- Var Co.: es el coeficiente de variación dentro de cada país para todos los productos que conforman el EB.

A continuación, se explican los indicadores incluidos en el subcuadro 4 (sobre detalles de nivel de producto):

- NC-Price: precio promedio del producto expresado en moneda nacional.
- Quotations: número de observaciones.
- Var. Co.: coeficiente de variación de las observaciones del producto en cada país.

- XR-price: es el precio promedio nacional convertido a la moneda del país base, utilizando el tipo de cambio de mercado. Se presenta el promedio geométrico de todos los países.
- XR-ratio: (XR-price/XR-price promedio) da una noción de la desviación del precio promedio respecto del promedio regional, utilizando el tipo de cambio de mercado.
- CUP-price: es el precio promedio nacional de cada país convertido a la moneda del país base, usando las PPA. Se presenta el precio promedio geométrico.
- CUP-ratio: (PPP-price / PPP-price promedio) da una noción de la desviación del precio promedio respecto del promedio regional, utilizando las PPA.
- Pref. UoM: es la unidad de medida preferida.

Se tomaron como valores críticos para revisar aquellos productos cuyo coeficiente de variación superaba el 33%, o los casos en los que las relaciones estaban fuera del rango (80%-125%). También se utilizaron los rangos de validación propuestos en el programa ICP KIT, en el que se resaltaban con diferentes colores la magnitud de las desviaciones de los precios promedio.

2. Cuadros Dikhanov

El cuadro Dikhanov está formado por dos subcuadros, cuyo formato se presenta en el cuadro A8.2.

■ Cuadro A8.2
Cuadro Dikhanov

Análisis temporal de Dikhanov		País 1	País 2	País 3
Período		Anual - 2005	Anual - 2005	Anual - 2005
PPP		2,934690064	658,1289976	4,040426119
STD		0,245237431	0,256006128	0,291549487
No of Priced Items		420	513	572
ER (LCU/US$)		2,43	527,47	5,78
Rebased_XR		4,418181818	959,0363636	10,50909091
PLI		0,664230261	0,686239878	0,384469613
Detalles a nivel de agregado o encabezado básico		País 1	País 2	País 3
Item Code	Item Name	Anual -2005	Anual -2005	Anual -2005
99.11.01.11.1	Arroz			
	PPP	1,81507	718,297	4,84856
	STD	0,05109	0,0726994	0,274263
	PLI	0,410819	0,748978	0,461368

Cuadro A8.2 (conclusión)

Detalles a nivel de agregado o encabezado básico		País 1	País 2	País 3
Item Code	Item Name	Anual -2005	Anual -2005	Anual -2005
	Nº of Priced Items	2	5	6
99.11.01.11.1.01	Arroz de grano largo, preenvasado	-0,5109	-	0,26746
	Average Price	1,5	-	5,51
	Nº of Observations	151	-	10
	Coefficient of Variation	11,2214	-	3
	XR Ratio	70,4386	-	108,78

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de herramienta desarrollada por Dikhanov provista por el Banco Mundial, con datos ficticios.

Nota: PPP: paridad del poder adquisitivo; STD: desviación estándar de los residuos del método país-producto simulado (PPS) (*country-product-dummy* (CPD)) o *country-product-representative-dummy* (CPRD); No of Priced Items: cantidad de productos especificados en el encabezado básico o en el agregado; ER (LCU/US$): tasa de cambio de mercado expresada como la cantidad de unidades de moneda local por unidad de dólares de los Estados Unidos; Rebased_XR: tasas de cambio rebasadas en términos de la moneda numerario; PLI: índice del nivel de precios; Item Code: código del encabezado básico o agregado; Item Name: nombre del encabezado básico o agregado; Average Price: precio promedio en moneda local; No of Observations: cantidad de observaciones de precios; Coefficient of Variation: coeficiente de variación de las observaciones de precios; XR Ratio: ratios de precios basadas en precios convertidos mediante la tasa de cambio.

A continuación, se detallan los indicadores del primer subcuadro:

- Período: período en el que se recopilaron los precios de los productos presentados en el cuadro.
- PPP: Paridad del poder adquisitivo para el encabezado básico o agregado analizado en el cuadro. Está expresada como la cantidad de unidades de moneda local por unidades de la moneda numeraria elegida. Los precios utilizados para calcular la PPP son los precios promedio, expresados en moneda local, proporcionados por los países sobre los productos que cotizaron para el EB o el agregado, esto es, los precios promedio.
- STD: desviación estándar de los residuos del método país-producto simulado (PPS) (*country-product-dummy* (CPD)) *o country-product-representative-dummy* (CPRD) de cada país para el EB con el agregado. Se puede convertir en un coeficiente de variación del país, multiplicándola por 100.
- Nº of Priced Items: cantidad de productos especificados en el EB o en el agregado
- ER (LCU/US$): tasa de cambio de mercado expresada como la cantidad de unidades de moneda local por unidad de dólares de los Estados Unidos.
- Rebased_XR: tasas de cambio rebasadas en términos de la moneda numerario. Cantidad de unidades de moneda local por unidad de la moneda numeraria.
- PLI: índice del nivel de precios. Las PPP expresadas como el ratio de las correspondientes tasas de cambio.

El segundo subcuadro contiene la siguiente información a nivel de agregado o encabezado básico:

- Item Code: código del EB o agregado presentado en el cuadro.
- Item Name: nombre del EB o agregado presentado en el cuadro.
- PPP: PPA para el encabezado básico o agregado analizado en el cuadro. Está expresada como la cantidad de unidades de moneda local por unidades de la moneda numerario elegida. Los precios utilizados para calcular la PPP son los precios promedio, expresados en moneda local, proporcionados por los países sobre los productos que cotizaron para el EB o el agregado, esto es, los precios promedio.
- STD: desviación estándar de los residuos del método país-producto simulado (PPS) (*country-product-dummy* (CPD)) o *country-product-representative-dummy* (CPRD) de cada país para el EB con el agregado. Se puede convertir en un coeficiente de variación del país, multiplicándola por 100.
- PLI: índice del nivel de precios. Las PPP expresadas como el ratio de las correspondientes tasas de cambio.
- Nº of Priced Items: cantidad de productos especificados en el EB o en el agregado.
- Average Price: precio promedio en moneda local.
- Nº of Observations: cantidad de observaciones de precios en la que se basa el promedio de precios.
- Coefficient of Variation: coeficiente de variación de las observaciones de precios.

3. Paridades de referencia

Las paridades de referencia se utilizan para aquellos agrupamientos de los que no se recolectan precios mediante los operativos en campo. En el cuadro A8.3 se describe la forma como se estiman las paridades en estos casos.

■ Cuadro A8.3

Encabezado básico		Paridad de referencia 2011
1102311	Narcóticos	Promedio geométrico no ponderado de las paridades del poder adquisitivo (PPA) de los encabezados básicos (EB) de tabaco (1102211) y productos farmacéuticos (1106111)
1104421	Otros servicios relacionados con la vivienda	Promedio geométrico ponderado de las PPA de los EB de mantenimiento y reparación de la vivienda (1104311) y suministro de agua (1104411)
1106311	Servicios hospitalarios	PPP del EB de servicios médicos (1106200)
1107141	Vehículos de tracción animal	PPP de bicicletas (1107131)
1107341	Transporte marítimo de pasajeros	PPA de servicios de transporte (1107300), excluidos los EB con PPA de referencia
1107351	Transporte de pasajeros combinado	Promedio geométrico ponderado de las PPA de los EB de transporte ferroviario de pasajeros (1107311) y transporte de pasajeros por carretera (1107321)

Cuadro A8.3 (continuación)

Encabezado básico		Paridad de referencia 2011
1107361	Otros servicios de transporte	Promedio geométrico ponderado de las PPA de los EB de transporte ferroviario de pasajeros (1107311) y transporte de pasajeros por carretera (1107321)
1109231	Mantenimiento de otros bienes duraderos importantes	Promedio geométrico ponderado de las PPA de los EB de mantenimiento y reparación de material de transporte (1107231) y reparación de equipos audiovisuales, de fotografía e informáticos (1109151)
1109431	Juegos de azar	PPA de servicios recreativos y deportivos (1109411)
1109611	Paquetes turísticos	Promedio geométrico ponderado de servicios de transporte (1107300) y hoteles y restaurantes (111100), excluidos los EB referenciados
1112211	Prostitución	PPA de consumo individual de los hogares (1100000), excluidos salud, educación y las PPA de referencia
1112411	Protección social	PPA de consumo colectivo del gobierno (1400000), excluidos los EB referenciados
1112511	Seguros	PPA de consumo individual de los hogares (1100000), excluidos salud, educación y las PPA de referencia
1112611	Servicios de intermediación financiera medidos indirectamente (SIFMI)	PPA de consumo individual de los hogares (1100000), excluidos salud, educación y las PPA de referencia
1112621	Otros servicios financieros	PPA de otros efectos personales (1112321)
1113111	Compras de residentes en el exterior	Tasa de cambio
1113112	Compras de no residentes en el país	Tasa de cambio
1201111	Consumo de las instituciones sin fines de lucro al servicio de los hogares	PPA de consumo individual del gobierno (1300000), excluidos los EB referenciados
1301111	Vivienda (gobierno)	PPA de alquileres actuales o imputados (1104111)
1302124	Servicios hospitalarios (gobierno)	PPA de producción de servicios de salud del gobierno (1302200), excluidos los EB referenciados
1302221	Consumo intermedio (servicios de salud)	PPA de consumo individual de los hogares (1100000), excluidos salud, educación y las PPA de referencia
1302231	Excedente bruto de explotación (servicios de salud)	PPA de formación bruta de capital fijo (1500000), excluidos los EB referenciados
1302241	Impuestos netos sobre la producción (servicios de salud)	PPA de producción de servicios de salud por el gobierno (1302200), excluidos los EB referenciados
1302251	Ingresos de las ventas (salud)	PPA de producción de servicios de salud por el gobierno (1302200), excluidos los EB referenciados
1303111	Recreación y cultura (gobierno)	Promedio geométrico ponderado de las PPA de servicios deportivos y recreativos (1109411) y servicios culturales (1109421)
1304111	Beneficios y reembolsos de educación	PPA de producción de servicios de educación por el gobierno (1304200), excluidos los EB referenciados
1304221	Consumo intermedio (educación)	PPA de consumo individual de los hogares (1100000), excluidos salud, educación y las PPA de referencia
1304231	Excedente bruto de explotación (educación)	PPA de formación bruta de capital fijo (1500000), excluidos los EB referenciados

Cuadro A8.3 (conclusión)

Encabezado básico		Paridad de referencia 2011
1304241	Impuestos netos sobre la producción (educación)	PPA de producción de servicios de educación por el gobierno (1304200), excluidos los EB referenciados
1304251	Ingresos por ventas (educación)	PPA de producción de servicios de educación por el gobierno (1304200), excluidos los EB referenciados
1305111	Protección social (gobierno)	PPA de consumo colectivo del gobierno (1400000), excluidos los EB referenciados
1401121	Consumo intermedio (servicios colectivos)	PPA de consumo individual de los hogares (1100000), excluidos salud, educación y las PPA de referencia
1401131	Excedente bruto de explotación (servicios colectivos)	PPA de formación bruta de capital fijo (1500000), excluidos los EB referenciados
1401141	Impuestos netos sobre la producción (servicios colectivos)	PPA de consumo colectivo del gobierno (1400000), excluidos los EB referenciados
1401151	Ingresos por ventas (servicios colectivos)	PPA de consumo colectivo del gobierno (1400000), excluidos los EB referenciados
1501212	Otros transportes por carretera	PPA de vehículos, remolques y semirremolques (1501211)
1501221	Otros equipos de transporte	PPA de maquinaria y equipos (1501000), excluidos los EB referenciados
1503111	Otros productos	PPA de formación bruta de capital fijo (1500000), excluidos los EB referenciados
1601111	Valor inicial de los inventarios	PPA de bienes
1601112	Valor final de los inventarios	PPA de bienes
1602111	Adquisición de bienes de valor	Tasa de cambio
1602112	Venta de bienes de valor	Tasa de cambio
1701111	Exportaciones de bienes y servicios	Tasa de cambio
1701112	Importaciones de bienes y servicios	Tasa de cambio

Fuente: Elaboración propia, sobre la base de Banco Mundial, "ICP classification" [en línea] pubdocs.worldbank.org/en/.../06-26-2017-ICP-Classification.xlsx.

Los números índices constituyen el instrumento básico para sintetizar las estadísticas económicas de modo que las fórmulas utilizadas permitan expresar y describir, por ejemplo, el crecimiento económico de un país o la tasa de inflación de una economía, y también para realizar comparaciones internacionales. Si se utilizan fórmulas diferentes, los resultados difieren y las comparaciones no son válidas. De ahí la importancia de conocer las fórmulas que se utilizan, y de que los países y los organismos internacionales promuevan prácticas comunes que armonicen y estandaricen las mediciones. Aunque los números índices se vinculan a la macroeconomía, su fundamento teórico se apoya en la microeconomía.

En esta publicación se resumen los vínculos entre los números índices de precio y de volumen y la teoría microeconómica, se presentan las fórmulas recomendadas para las mediciones internacionales y se explica cómo utilizarlas en las comparaciones internacionales de precios y de volúmenes.

La colección *Metodologías de la CEPAL* se orienta a la divulgación de los fundamentos conceptuales, las especificaciones técnicas de elaboración y las aplicaciones de los instrumentos cuantitativos y cualitativos producidos y utilizados en el ámbito de la CEPAL. Su propósito central es contribuir mediante más y mejores instrumentos al diseño de políticas públicas basadas en datos empíricos que generen un desarrollo sostenible con igualdad.

Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL)
Economic Commission for Latin America and the Caribbean (ECLAC)
www.cepal.org

ISBN 978-92-1-121992-0